Cours pratique et théorique d'arithmétique, d'après la méthode de Pestalozzi... par H.-L.-D. Rivail,...

COURS

PRATIQUE ET THÉORIQUE

D'ARITHMÉTIQUE,

D'APRÈS LA MÉTHODE DE PESTALOZZI,

AVEC DES MODIFICATIONS.

Cet ouvrage se trouve aussi à

Agen... chez Noubel.
Aix-la-Chap. Laruelle.
Angers .... Fourrié-Mame.
Arras..... Topino.
Bayonne ... Bonzom.
Berlin..... Schlesinger.
Besançon.. Deis, Girard.
Blois..... Aucher-Eloi.
Bordeaux.. Mme Bergeret, Lawalle jeune, Melon, Coudert, Gassiot, Gayet.
Bourges.... Gilles.
Breslau .... Korn.
Brest..... Le Fournier-Desp., Egasse, Michel.
Bruxelles.. Lecharlier, Demat, Stapleaux, Lacrosse.
Caen...... Mme Belin-Lebaron.
Calais.... Leleux.
Cambrai ... Giard.
Chartres ... Hervé.
Clermont-F. Thibaud.
Dijon..... Lagier, Noellat, Tussa.
Dunkerque. Bronner-Beauwens. Lenoir,
Florence ... Piatti.
Francfort... Brœnner.
Gand..... Dujardin, Houdin.
Genève.... Paschoud, Mangez-Cherbuliez.
Havre.... Duflo, Chapelle.
Lausanne... Fischer.
Leipsick... Grieshammer. Zirgès.
Liége .... Desoër, Collardin.
Lille...... Vanackère

Londres... Bossange, Dulau, Treuttel et Würtz.
Lorient.... Caris, Fauvel.
Lyon ..... Bohaire, Faverio, Maire.
Manheim... Artaria et Fontaine.
Mans..... Pesche.
Marseille.. Chardon, Maswert, Moissy, Camoin, Chaix.
Metz..... Devilly, Thiel.
Mons..... Leroux.
Montpellier. Sevalle, Gabon fils.
Moscou .... Fr. Riss père et fils
Nancy .... Vincenot.
Nantes..... Busseuil.
Naples. .. Borel, Marotta et Vanspandoch.
Nîmes..... Melquiond.
Niort..... Elies-Orillat.
Orléans.... Huet-Perdoux.
Rennes.... Duchesne, Molliex.
Rouen.... Frère, Renault, Dumaine-Vallé.
Saint-Brieux. Lemonnier.
Saint-Malo.. Rottier.
Saint-Pétersbourg C. Weyer, Saint-Florent.
Stockholm .. Cumelin.
Strasbourg. . Levrault.
Toulouse.. Vieusseux, Senac.
Turin.... Ch. Bocca, Pic.
Valenciennes. Lemaitre.
Vienne .... Shalbacher.
Warsovie... Klugsberg.
Ypres..... Gambart-Dujardin.

DE L'IMPRIMERIE DE PILLET AÎNÉ.

COURS

Pratique et Théorique

D'ARITHMÉTIQUE,

D'APRÈS LA MÉTHODE DE PESTALOZZI,

AVEC DES MODIFICATIONS.

Contenant des exercices de calcul de tête pour tous les âges; un grand nombre d'applications; des questions théoriques sur les diverses parties de l'arithmétique, et qui peuvent servir d'examen; une table de la réduction des monnaies étrangères en monnaies françaises; une théorie des logarithmes, etc., etc.

Ouvrage également propre aux instituteurs et aux mères de famille qui veulent donner à leurs enfants les premières notions de cette science, et dans lequel on n'a rien négligé de tout ce qui pouvait en rendre l'utilité plus générale.

PAR H. L. D. RIVAIL,

DISCIPLE DE PESTALOZZI.

Associer de bonne heure le jugement à la mémoire, serait le chef-d'œuvre de la première éducation, si l'on savait s'y prendre comme la nature.

LACROIX, *Essais sur l'Enseignement.*

TOME SECOND.

A PARIS,

CHEZ PILLET AINÉ, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,

ÉDITEUR DE LA COLLECTION DES MOEURS FRANÇAISES,

RUE CHRISTINE, N° 5.

1824.

COURS
Pratique et Théorique
D'ARITHMÉTIQUE.

TROISIÈME COURS.

ARITHMÉTIQUE.

§ Ier.

SYSTÈME DE NUMÉRATION.

Idée de l'unité et du nombre.

(1) LORSQU'ON dit qu'une salle a dix pieds de longueur, on compare la longueur de cette salle à une quantité qui sert de terme de comparaison et qui est *le pied*. Lorsqu'on dit qu'un objet pèse six livres, le terme de comparaison est *la livre*, parce qu'on compare l'objet pesé avec la livre. Si l'on dit qu'il faut une

demi-aune d'étoffe pour un gilet, le terme de comparaison est *l'aune*. Ces quantités que l'on prend pour termes de comparaison d'une autre quantité, s'appellent *unités*. Ainsi, dans les cas précédents, les unités sont : *le pied*, *la livre*, et *l'aune*.

Lorsqu'on dit qu'une armée est composée de trente mille hommes, l'unité est *un homme*, parce qu'on compare la totalité de l'armée avec chaque individu en particulier.

Si l'on dit que cette armée contient vingt bataillons, l'unité est *un bataillon*.

Question. La quantité que l'on compare et celle à laquelle on compare peuvent-elles être de différente nature? Par exemple, peut-on comparer la longueur d'une salle avec l'unité de poids?

On sentira facilement que cela ne se peut pas. D'où l'on voit qu'il faut ajouter à la définition de l'unité, *que les quantités doivent être de même espece*.

L'unité est donc une quantité que l'on prend pour terme de comparaison de toutes les quantités de même espèce. (Définition de Bezout) (1).

Une certaine quantité d'unités de même espèce réunies forment ce qu'on appelle *un nombre*.

Question. Y a-t-il une différence entre ces deux expressions : *dix* et *dix hommes*?

Il est facile de remarquer que dans la première expression ce nombre dix peut s'appliquer à toute espèce d'unités. Ce peut être dix fruits, dix francs, parce qu'on ne détermine pas l'espèce de l'unité, tandis que dans la seconde on la détermine. On dit que ce sont dix hommes. On peut donc considérer jusqu'à présent deux espèces de nombres, savoir : ceux dont l'espèce de l'unité est indéterminée, que l'on nomme nombres *abstraits*, et ceux dont l'espèce de l'unité est spécifiée, que l'on nomme nombres *concrets* (11).

De la numération.

(2) En examinant la série des nombres depuis *un* jusqu'à *cent*, on peut remarquer qu'ils sont divisés par classes, de dix en dix unités appelées *dizaines*. Chacune de ces dizaines porte un nom qui indique le rang qu'elle occupe parmi les autres. La première se compose de la série des dix premiers nombres, un, deux, trois..... dix. La seconde se compose de la première dizaine, à laquelle on ajoute successivement chacun des dix premiers nombres. Ainsi l'on a : *dix-un*, *dix-deux*, *dix-trois*, *dix-quatre*, *dix-cinq*, *dix-six*, *dix-sept*, *dix-huit*, *dix-neuf*, et enfin dix plus dix que l'on nomme *vingt*. L'usage a changé ces expressions, et l'on dit : *onze*, *douze*, *treize*, etc.

A la seconde dizaine on ajoute de même chacun des dix premiers nombres, et l'on a *vingt-un*, *vingt-deux*, *vingt-trois*, etc. ; enfin vingt plus dix pour la troisième que l'on appelle *trente* et à laquelle on ajoute chacun des dix premiers nombres. Il en est de même de toutes les dizaines. La quatrième s'appelle *quarante*, la cinquième *cinquante*, la sixième *soixante*, la septième *septante* ou *soixante-dix*, la huitième *huitante* ou *quatre-vingts*, la neuvième *nonante* ou *quatre-vingt-dix*, et la dixième *cent*.

Les expressions *septante*, *huitante* et *nonante* sont infiniment plus naturelles que celles de *soixante-dix*, *quatre-vingts* et *quatre-vingt-dix*; ces dernières détruisent l'uniformité de ce système, et dans beaucoup d'endroits les premières sont encore usitées; mais l'usage ayant consacré les autres, il faut les adopter. L'expression *quatre-vingts* vient d'une ancienne habitude de compter par *vingtaines*, encore usitée dans quelques-unes de nos campagnes, où l'on dit : *deux vingts*, *trois vingts*, *quatre-vingts*, *cinq vingts* et *six vingts*.

Il est très-important de se pénétrer de l'esprit de ce système de numération; car c'est sur lui qu'est basé tout le calcul. Dans le second Cours, page 85, je traite cette partie d'une manière beaucoup plus simple et à la portée d'un enfant de huit ans (111).

Cette collection de cent unités s'appelle une centaine. Si l'on examine la manière dont on a formé les nombres qui suivent cent, on observera qu'à la première centaine on ajoute successivement chacun des cent premiers nombres. On a donc *cent un*, *cent deux*, *cent trois*, etc., etc., jusqu'à cent plus cent ou *deux cents* pour la seconde centaine; à cette seconde centaine on ajoute de même les cent premiers nombres, et enfin à chaque centaine on ajoute une nouvelle centaine, jusqu'à ce qu'on en ait dix, ce qui forme un *mille*. On a donc : *deux cent un*, *deux cent deux*, *deux cent trois*, etc.; *quatre cent un*, *quatre cent deux*, *quatre cent trois*, etc.; *cinq cent un*, *cinq cent deux*, *cinq cent trois*, etc., jusqu'à *dix cents*, que l'on appelle *mille*.

Question. Combien un mille contient-il de centaines?

Réponse. Il en contient dix.

Question. N'y a-t-il pas une certaine analogie entre la formation des mille par les centaines, la formation des centaines par les dizaines, et la formation des dizaines par les unités?

Réponse. Oui. Les dizaines sont formées de dix unités, comme les centaines sont formées de dix dizaines, et comme les mille sont formés de dix centaines.

On forme de même une collection de dix mille, qu'on appelle *dizaine de mille;* une collection de dix dizaines de mille, qu'on nomme *centaine de mille;* une collection de dix centaines de mille, qu'on appelle un *million*, et ainsi de suite.

Pour se former une idée exacte de cette formation, supposons qu'on pose sur une table un grain de blé, au dessous on posera un tas de dix grains; sur une ligne inférieure on posera dix tas de dix grains chacun, on aura une centaine; sous cette centaine on posera dix autres tas chacun de cent grains, on aura un mille; sous ce mille on posera dix autres tas chacun de mille grains, on aura une dizaine de mille, etc.

Telle est cette progression décuple sur laquelle est basé tout le système de numération, et qui est d'un si grand avantage.

On voit que, par ce système, on évite un grand nombre de noms qu'on aurait une peine infinie à retenir, si l'on avait un mot particulier pour chaque nombre. Au lieu de cela, un nombre est toujours exprimé par les noms des collections principales dont il est formé. C'est ainsi que, si l'on veut exprimer un nombre de deux centaines, trois dizaines et huit unités, on dit : *deux cent trente-huit*. Cette expression a en outre l'avantage d'indiquer au premier coup d'œil le rang qu'occupe ce nombre parmi les autres, et par conséquent sa valeur, ce qui n'aurait pas lieu si l'on avait un nom pour chacun.

Quant à la raison pour laquelle on a choisi cette progression décuple plutôt que toute autre, il est à présumer qu'elle vient des dix doigts, premiers instruments dont les hommes se sont servis pour compter.

Quelle que soit l'origine de ce système, on peut le regarder comme une invention admirable; et l'auteur, quoique inconnu, mérite un juste tribut de reconnaissance.

La manière dont on écrit les nombres est aussi admirable et aussi ingénieuse que celle dont on les énonce.

Manière d'écrire les nombres.

(3) La manière la plus naturelle d'écrire les nombres est de faire autant de traits que le nombre contient d'unités; tel a dû être le moyen employé dans l'origine, moyen encore en usage chez les boulangers pour marquer sur la *taille* (*), et employé par les personnes qui ne savent pas faire les chiffres.

(*) Petit morceau de bois carré sur lequel les boulangers

Mais on ne tarda pas à s'apercevoir que ce moyen était insuffisant, lorsqu'on avait de grands nombres à écrire.

Nous allons donc examiner tous les moyens qui se présenteront à nous pour écrire les nombres d'une manière abrégée, en supposant que rien ne soit encore inventé.

Si l'on imagine un signe pour chaque nombre, on aura certainement un moyen prompt de les écrire; mais aussi la quantité innombrable de signes qu'il faudrait le rend impraticable. Il entraînerait les mêmes inconvénients que si l'on avait un nom pour chacun. Mais comme on a une pièce d'argent pour éviter d'avoir des sous, de même ayons un signe pour un certain nombre d'unités, et nous mettrons autant de ces signes qu'il en faudra pour les nombres que nous voudrons écrire; et afin qu'il y ait de l'analogie entre la manière de les écrire et celle de les énoncer, nous nous servirons des principales collections d'unités déjà connues, c'est-à-dire que nous aurons un signe pour les dizaines, un pour les centaines, un autre pour les mille.

Pour une dizaine nous nous servirons d'un X, pour une centaine d'un C, pour le mille d'un M, pour les dizaines de mille d'un D, et pour les centaines de mille d'un N (III).

---

marquent par des raies le nombre de livres vendues à une personne.

Pour écrire de cette manière trente-huit, on mettra trois dizaines et huit unités : XXXIIIIIIII.

Pour cinq cent quarante-deux, on mettra cinq centaines, quatre dizaines et deux unités : CCCCCXXXXII.

Pour trois mille deux cent cinquante-neuf : MMMCCXXXXXIIIIIIIII.

Remarquons que les signes ont une valeur croissante dans une progression décuple, c'est-à-dire de dix en dix fois plus grande de droite à gauche, le signe X vaut dix fois autant que le signe I, le signe C vaut dix fois autant que le signe X, et le signe M vaut dix fois autant que le C.

Question. Combien pourrait-on mettre d'X à la place de deux C, dans le nombre précédent?

Réponse. On pourrait mettre vingt X.

Question. Par combien de C ou d'X peut-on remplacer les trois M?

Réponse. Par trente C ou par trois cents X; car un mille vaut dix centaines, et trois mille en valent trente; un mille vaut aussi cent dizaines, et trois mille en valent trois cents.

Il faut exercer l'élève à lire des nombres écrits de cette manière, et à en écrire sous la dictée. On aura soin de les lui faire décomposer en dizaines, centaines, mille, etc., c'est-à-dire chercher combien le nombre contient en tout chacune de ces collections, comme dans l'exemple suivant :

Exemple de décomposition de ce genre :

MMMMMCCCCCCXXXXIIIII.

— Combien ce nombre contient-il de centaines en tout?

R. Un mille vaut dix centaines, cinq mille en valent cinquante.

— Combien contient-il de dizaines?

R. Un mille vaut cent dizaines, cinq mille en valent par conséquent cinq cents, six centaines valent soixante dizaines; cela fait ensemble *cinq cent soixante-quatre* dizaines.

— Quel est le plus grand nombre de signes de l'unité dont nous ayons besoin?

R. De neuf.

En effet, si nous en avons dix, nous les remplaçons par le signe des dizaines.

— Combien avons-nous besoin de signes de dizaines?

R. De neuf. Si nous en avons dix, nous les remplaçons par le signe des centaines.

De même on n'a besoin que de neuf signes de centaines; si l'on en avait dix, on les remplacerait par le signe de mille; dix mille seraient remplacés par le signe des dizaines de mille, et dix dizaines de mille par le signe des centaines de mille.

Supposons que l'on ait à écrire *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, on aura : NNNNNNNNN,DDDDDDDDD,MMMMMMMMM,CCCCCCCC,XXXXXXXXX,IIIIIIII.

Quoique ce moyen soit infiniment plus commode que si l'on avait un signe pour chaque nombre, ou que si l'on écrivait un nombre par autant d'unités qu'il en contient, néanmoins il est encore trop long, et nous allons chercher à le simplifier.

Remarquez, comme nous l'avons fait observer un peu plus haut, qu'on n'a jamais besoin au plus que de neuf signes de chaque collection; car dès l'instant où il en faudrait dix, ils sont remplacés par le signe de la collection immédiatement supérieure.

Ayons donc un signe pour chacun des nombres depuis un jusqu'à neuf, et nous nous en servirons avec un grand avantage. Ces signes sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

L'origine de ces chiffres est attribuée aux arabes.

Nous ne mettrons qu'un seul signe pour chaque collection, et nous placerons à gauche un des neuf chiffres arabes pour en indiquer le nombre.

Ainsi, pour le dernier nombre que nous avons écrit, au lieu de mettre neuf signes pour chaque collection, nous n'en mettrons qu'un, et nous placerons à gauche de chacun un 9. On aura donc :

9N9D9M9C9X9I, ce qui est infiniment plus prompt.

Mais remarquez qu'en commençant par les unités, les dizaines occupent le second rang, les centaines le troisième, les mille le quatrième, les dizaines de mille le cinquième, et les centaines de mille le sixième. D'après cette observation, on peut retrancher les signes I, X, C, etc.; car la valeur des chiffres est indiquée par la place qu'ils occupent. Dans le nombre 7842, on voit que le 7 est au quatrième rang, il vaut donc sept mille, le 8 huit centaines, le 4 quarante, et le 2 deux unités. On l'énoncera : sept mille huit cent quarante-deux. Le 7 pourrait être remplacé par sept M, le 8 par huit C, le 4 par quatre X, et le 2 par deux I.

Supposons qu'on ait à écrire 2C8X sans les signes de dizaines ni de centaines, on aura 28, et rien n'indiquera que le 2 doit être dans le rang des centaines. Il faut donc remplacer celui des unités par un signe quelconque. On se sert de zéro. Ainsi ce nombre s'écrit 280.

Tel est le système de numération en usage, et qui ne le cède à aucun autre pour la facilité du calcul et la promptitude avec laquelle on écrit les nombres les plus forts. Une des propriétés de ce système est que les chiffres acquièrent une valeur de dix en dix fois plus grande à mesure qu'on les avance d'un rang vers la gauche, et par conséquent diminuent dans la même proportion en avançant vers la droite. Ainsi un chiffre placé dans la colonne des dizaines vaut dix fois autant que s'il était placé dans celle des unités. Celui qui est dans la colonne des centaines vaut dix fois autant que s'il était dans celle des dizaines, ainsi de suite.

Cette vérité est rendue sensible par le tableau suivant, sur lequel l'instituteur fera remarquer les différentes valeurs que peuvent avoir les chiffres, et la proportion suivant laquelle cette valeur varie.

1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4

5 5 5 5 5 5 5 5 5
6 6 6 6 6 6 6 6 6
7 7 7 7 7 7 7 7 7
8 8 8 8 8 8 8 8 8
9 9 9 9 9 9 9 9 9

Enoncé des nombres.

(4) Enoncez les nombres suivants :

97 ; 871 ; 7231 ; 63729 ; 120344 ; 3999829 ; 24992434 ; 2117228312 (IV).

Plus les nombres sont forts, plus ils sont difficiles à lire, parce qu'on a de la peine à voir au premier coup d'œil le rang auquel appartient chaque chiffre. Pour en faciliter la lecture, on les partage par tranches de trois en trois chiffres, en commençant par la droite. Exemple :

345,729,321,454.

Chaque tranche a un nom particulier et contient ses unités, ses dizaines et ses centaines. La première à droite est celle des unités, la deuxième celle des mille, la troisième celle des millions. Viennent ensuite celles des billions, des trillions, des quatrillions, etc.

billions.	millions.	mille.	unités.
345,	729,	321,	454.

On énonce chaque tranche séparément, comme si c'étaient des unités simples, en ajoutant le nom à la fin. On dira donc pour le nombre ci-dessus : 345

billions, 729 millions, 321 mille, 454 unités, ou simplement 454.

J'ai dit plus haut qu'il fallait commencer à marquer les tranches par la droite ; voyons s'il est nécessaire de commencer de ce côté, ou si l'on ne pourrait pas aussi commencer par la gauche. Supposons qu'on ait le nombre suivant à énoncer, et qu'on commence à marquer les tranches par la gauche, on aura 247,234,5. Il reste un chiffre pour la tranche des unités, qui doit valoir 5. Or, la première tranche doit contenir trois rangs, et elle n'en contient ici qu'un seul, ce qui ne peut pas avoir lieu ; car il faudrait remplacer les autres par des zéros, s'ils ne le sont pas par des chiffres significatifs, et de cette manière on augmenterait de beaucoup le nombre.

Si au contraire on commençait par la droite, on aurait 2,472,345.

De cette observation on conclut donc que pour lire avec facilité un nombre quelconque, il faut le séparer par tranches de trois chiffres en commençant par la droite, et les énoncer séparément, comme on vient de l'indiquer.

Différence entre le chiffre et le nombre.

(5) L'élève peut répondre seul aux questions suivantes.

— Peut-on mettre le nombre *un* dans la colonne des dizaines? *R.* Non.

— Peut-on y mettre le chiffre 1? *R.* Oui.

— Dans quelle colonne peut-on mettre les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9? *R.* Dans toutes.

— Dans quelle colonne peut-on mettre les nombres un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf? *R.* Dans celle des unités seulement.

— Les chiffres changent-ils de valeur? *R.* Oui.

— En est-il de même des nombres? *R.* Non.

— Quelle différence y a-t-il entre le chiffre et le nombre?

Les questions précédentes ont fait sentir à l'élève cette différence. Il n'importe pas que son explication soit rigoureuse, il suffit qu'elle indique qu'il se comprend, alors on la rectifiera de la manière suivante:

Le nombre est une quantité déterminée d'unités, et le chiffre est un signe qui représente le nombre.

— Quelles sont les différentes valeurs que peut avoir le chiffre 1? *R.* Un, dix, cent, mille, dix mille, etc.

— Quelles sont les différentes valeurs que peuvent avoir chacun des huit autres chiffres?

Lorsqu'un chiffre a sa valeur naturelle, c'est-à-dire lorsqu'il est seul, ou dans la colonne des unités, on dit qu'il a une valeur *absolue;* mais quand il est accompagné d'autres chiffres qui lui font changer de valeur, on dit qu'il a une valeur *relative.*

Dans 36, le 6 a une valeur absolue, et le 3 une valeur relative.

La valeur relative d'un chiffre est toujours plus forte que sa valeur absolue.

Théorie du système de numération.

(6) Le système de numération actuel consiste en un nombre limité de noms et de signes au moyen desquels on a pu exprimer et représenter tous les nombres possibles.

Les nombres sont divisés par collections de *dix*, *cent*, *mille*, etc., *unités*, qui prennent les noms de *dizaine*, *centaine*, *mille*, *dizaine de mille*, *centaine de mille*, *million*, *dizaine de million*, *centaine de million*, *billion*, etc.

Chacune de ces collections contient dix fois celle qui la précède dans l'ordre que nous indiquons ici.

Un nombre s'exprime par les noms des diverses collections dont il est composé.

Pour écrire un nombre on se sert de neuf chiffres, et d'un autre signe appelé *zéro*. Ce sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Ces neuf chiffres changent de valeur suivant le rang qu'on leur fait occuper. Dans le premier rang droite ils valent des unités simples ; dans le deuxième des dizaines ; dans le troisième des centaines ; dans le quatrième des mille ; dans le cinquième des dizaines de mille ; dans le sixième des centaines de mille, etc.

Ainsi chaque chiffre peut avoir différentes valeurs suivant la place qu'il occupe parmi les autres. Ces différentes valeurs sont celles des collections d'unités dont on s'est servi pour exprimer les nombres.

L'augmentation de la valeur des chiffres se fait dans une progression décuple de droite à gauche, et ils diminuent dans la même proportion en allant de gauche à droite.

Ce système offre l'avantage de pouvoir écrire les nombres jusqu'à l'infini avec les dix caractères dont nous nous servons, puisqu'on peut les ajouter à la gauche les uns des autres jusqu'à l'infini, et que par ce moyen ils acquièrent des valeurs toujours croissantes.

Le zéro n'a aucune valeur par lui-même, mais il sert à remplacer les collections qui manquent dans le courant d'un nombre.

Pour lire facilement un nombre il faut le partager par tranches de trois chiffres chacune, en commençant par la droite. Chaque tranche a un nom particulier, et s'énonce séparément comme si c'était des unités simples, en ajoutant le nom à la fin. 367,891,012 s'énonce ainsi :

Trois cent soixante-sept millions, huit cent quatre-vingt-onze mille douze.

Ces tranches prennent aussi le nom de *ternaires.*

Le nombre est une quantité déterminée d'unités, et le chiffre est le signe qui sert à représenter le nombre.

Questions théoriques sur le système de numération.

(7) 1° Qu'est-ce que l'unité?

2° Qu'est-ce que c'est qu'un nombre?

3° Comment appelle-t-on un nombre dont l'espèce de l'unité est indéterminée?

4° Comment appelle-t-on un nombre dont l'espèce de l'unité est déterminée ?

5° Qu'est-ce qu'un nombre cardinal? — Qu'est-ce qu'un nombre ordinal?

6° Comment a-t-on exprimé tous les nombres?

7° Quel avantage présente la manière de compter dont on fait usage?

8° Comment écrivait-on les nombres avant l'invention des chiffres?

9° De combien de chiffres se sert-on pour écrire tous les nombres?

10° Comment a-t-on pu représenter tous les nombres avec dix caractères ou chiffres?

11° Dans quelle progression s'est faite l'augmentation de la valeur des chiffres?

12° Quels noms donne-t-on aux différentes colonnes?

13° Le nombre des colonnes est-il limité?

14° Quel est le plus petit et quel est le plus grand nombre que l'on peut mettre dans chaque colonne?

15°. Ecrivez 403. Combien vaut le 4? combien vaut le zéro? et combien vaut le 3?

16° A quoi sert le zéro dans 403? Ne pourrait-on pas se dispenser de l'écrire, ou pourrait-on le mettre à droite ou à gauche du nombre?

17° Quel est le moyen de lire facilement un nombre?

18° Quels sont les noms des tranches ou ternaires?

19° Quelle différence y a-t-il entre le chiffre et le nombre?

20° Quelles sont les différentes valeurs que peuvent avoir les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

21° Qu'est-ce que la valeur absolue?

22° Qu'est-ce que la valeur relative?

23° Comment appelle-t-on la convention au moyen de laquelle on représente tous les nombres avec dix caractères?

Réponses aux questions précédentes.

(8) 1° L'unité est une quantité que l'on prend pour terme de comparaison de toutes les quantités de même espèce.

2° Un nombre est une quantité déterminée d'unités.

3° Nombre abstrait.

4° Nombre concret.

5° Le nombre cardinal indique une certaine quantité d'unités, comme dix hommes. — Le nombre ordinal indique le rang qu'une unité occupe parmi les autres ; exemple : cet homme est le douzième.

6° On a formé des collections de dix, cent, mille, etc., unités. On a donné un nom à chacune de ces collections, et l'on a exprimé les nombres en réunissant les noms des collections dont chacun est composé.

7° Elle présente, entre autres avantages, celui d'exprimer tous les nombres avec une quantité très-bornée de noms et de signes.

8 On écrivait les nombres par autant de traits qu'ils contiennent d'unités.

9° On se sert de dix caractères ou chiffres dont neuf ont une valeur. Le dernier, qu'on appelle zéro, n'a aucune valeur par lui-même, mais il sert à remplacer les chiffres qui manquent dans un nombre.

10° En leur donnant une valeur différente suivant la place qu'on leur fait occuper.

11° Dans une progression décuple, c'est-à-dire que le 1, placé dans la première colonne à droite, vaut 1; dans la seconde, 10; dans la troisième, 100; dans la quatrième, 1000, etc.

12° En commençant par la droite : unités, dizaines, centaines, mille, dizaine de mille, centaine de mille, etc.

13° Non.

14° Dans la colonne des unités, le plus petit nombre est 1, et le plus fort 9; dans la colonne des dizaines, le plus petit est 10, et le plus fort 90; dans celle des centaines, le plus petit est 100, et le plus fort 900, etc.

15° Le 4 vaut 400; le zéro n'a aucune valeur; le 3 vaut 3 unités.

16° Le zéro, dans 403, sert à remplacer les dizaines et à indiquer que le 4 occupe le troisième rang. Si on l'omettait on aurait 43, si on le mettait à droite on aurait 430, et si on le mettait à gauche on aurait encore 043.

17° Pour lire facilement un nombre, on le sépare par tranches de trois chiffres chacune, en commençant par la droite.

18°. En commençant par la droite : unités, mille, millions, billions, trillions, quatrillions, etc.

19°. Le nombre est une certaine quantité d'unités, et le chiffre est un signe qui représente le nombre.

20° Le 1 peut valoir : un, dix, cent, mille, dix mille, etc. Le 2 peut valoir : deux, vingt, deux cents, deux mille, vingt mille, etc.

21° La valeur absolue d'un chiffre est la valeur qu'il a par lui-même lorsqu'il est seul, ou dans la colonne des unités.

22° C'est la valeur qu'un chiffre acquiert par sa position, relativement aux autres chiffres qui composent un nombre.

23° Système de numération.

§ II.

ADDITION (V).

(9) — Un marchand a vendu dans trois mois pour les sommes suivantes, savoir : 132 fr., 246 fr. et 201 fr.; pour combien a-t-il vendu?

Pour trouver la somme totale il faut ajouter les trois sommes partielles, ou autrement les *additionner;* et l'opération que l'on fait se nomme *addition.*

L'addition est donc une opération par laquelle on ajoute plusieurs nombres ensemble.

Lorsque les nombres sont petits, il est facile de les additionner de tête (*); mais lorsqu'ils sont forts, cela deviendrait très-difficile : il faut alors se servir d'une formule qui en facilite l'exécution.

(*) Voyez le deuxième cours, page 61.

Reprenons l'exemple ci-dessus, c'est-à-dire les nombres 132, 246 et 201. Une personne à laquelle l'arithmétique est étrangère s'y prendra de cette manière : 100 plus 200, plus 200, font 500 ; 30 plus 40 font 70 ; 2 plus 6, plus 1, font 9. Ensemble : cinq cent soixante-dix-neuf. C'est-à-dire qu'elle commencera par additionner les centaines, puis les dizaines, et enfin les unités.

Ce moyen est le plus naturel, et, je crois, celui que l'on a dû employer dans le principe; mais lorsqu'il y a beaucoup de nombres, il vaut mieux les poser les uns sous les autres, en ayant soin de placer les unités dans une même colonne verticale, ainsi que les autres collections. On additionne ensuite séparément chaque colonne, et l'on en pose la somme au bas de chacune.

$$\begin{array}{r l} 345 & \text{aunes.} \\ 221 & \\ 213 & \\ \hline 779 & \text{aunes.} \end{array}$$

Dans cet exemple, on voit qu'en additionnant les centaines on en reçoit 7 que l'on pose sous les centaines. On reçoit de même 7 dizaines que l'on place dans la colonne des dizaines, et 9 unités que l'on place dans celle des unités.

On peut remarquer que jusqu'ici il est indifférent de commencer par la droite ou par la gauche.

$$\begin{array}{r} 526 \\ 212 \\ 104 \\ \hline 842 \end{array}$$

(10) Dans cette question, la somme des unités surpasse 9, et d'après une observation faite plus haut au nº 3, dans le système de numération, on sait que le plus grand nombre que l'on peut mettre dans la colonne des unités est 9. Le surplus sera donc des dizaines que l'on placera dans la colonne des dizaines. Ainsi on aura 6 plus 2 plus 4 font 12 unités. Mais dans 12 unités il y a une dizaine que l'on retient pour la seconde colonne, et l'on place 2 unités dans la première. 2 dizaines plus 1 dizaine, plus la dizaine que l'on vient de retenir, font 4 dizaines que l'on place dans la seconde colonne.

On conçoit qu'on obtiendrait le même résultat en commençant par la gauche, mais voici l'inconvénient que cela présente. Il n'y a réellement que 3 dizaines dans la colonne des dizaines. Il faudrait donc effacer les 3 dizaines que l'on aurait posé à la somme pour y ajouter la dizaine provenant de l'addition des unités; c'est pour éviter cet inconvénient, qui se renouvellerait à chaque colonne dans les longues opérations, que l'on préfère commencer par la droite.

(11) *Observation.* L'instituteur devra proposer à l'élève la première question sur l'addition, et sans lui indiquer aucune formule, lui laisser employer pour la résoudre le

moyen que lui suggérera son instinct. Peu importe ce moyen, pourvu qu'il conduise à un résultat exact. On lui indique ensuite les formules abréviatives que l'on emploie. Chaque difficulté doit être présentée à l'élève, et celui-ci doit chercher lui-même à la résoudre. Ce principe est général.

Pour éviter le mécanisme qui existe souvent dans la manière dont on fait résoudre ces opérations, et afin que l'élève puisse se rendre compte de ce qu'il fait et de ce qu'il dit, je recommande expressément de faire indiquer dans le commencement la colonne à laquelle appartient chaque chiffre qu'il énonce. Ainsi il ne dira point pour la dernière question : 4 et 2 font 6 et 6 font 12, je pose 2 et je retiens 1 ; 1 et 1 font 2 et 2 font 4, je pose 4, etc. De cette manière il ne fait aucune distinction des chiffres de la seconde colonne avec ceux de la première (VI). Plus tard, lorsqu'il sera familiarisé avec ces opérations, on lui fera faire abstraction de cette distinction ; mais dans le commencement il est nécessaire qu'il dise : 4 unités et 2 unités font 6 unités ; 6 unités et 6 unités font 12 unités ; je pose deux unités dans la colonne des unités, et je retiens 1 dizaine. 1 dizaine, etc.

Si la somme de la dernière colonne à gauche ne peut pas être écrite dans cette colonne, comme dans 881 + 704, on ne fera point dire en parlant des centaines : 8 et 7 font 15, je pose 5 et j'avance 1, mais 8 centaines et 7 centaines font 15 centaines, je pose 5 centaines dans la colonne des centaines, et 1 mille dans la colonne des mille.

Applications.

(12) 1° Une personne allant de Paris à Rome, a dépensé de Paris à Lyon 252 fr., de Lyon à Grenoble 52 fr., de Grenoble à Turin 180 fr., de Turin à Flo-

rence 140 fr., et de Florence à Rome 80 fr.; combien lui a coûté son voyage?

2° La bataille de Marathon fut livrée 490 ans avant J.-C.; combien y a-t-il d'années?

3° Le monde fut créé 4004 ans avant J.-C.; combien y a-t-il d'années?

4° Combien d'années se sont écoulées depuis le déluge? Il est arrivé 2356 ans avant notre ère.

5° La bataille des Thermopyles fut livrée 491 ans avant J.-C.; combien d'années se sont écoulées depuis?

6° La prise de Troie fut faite 1184 ans avant J.-C.; combien y a-t-il d'années?

7° En quelle année est mort un homme âgé de 78 ans, et né en 1712?

8° Un gentilhomme a laissé après sa mort 17180 fr. à son fils aîné; 6180 fr. à chacun de ses trois autres fils; 4015 fr. à chacune de ses quatre filles; 8800 fr. en dons et 24000 fr. à sa femme; combien a-t-il laissé?

9° De Marseille à Valence il y a 40 lieues; de Valence à Lyon 25 lieues; de Lyon à Auxerre 60 lieues, et d'Auxerre à Paris 44 lieues; quelle est la distance de Marseille à Paris?

10° Un négociant fait un commerce depuis 8 ans; il veut voir quelle est sa fortune, et trouve qu'il a gagné dans les 8 années : 1° 60 fr.; 2° 694 fr.; 3° 721 fr.; 4° 819 fr.; 5° 2532 fr.; 6° 4687 fr.; 7° 7319 fr.; 8° 19251 fr.; quelle est sa fortune?

11°	12°	13°
35109	21435	31425
50947	43142	52143
42398	32524	25264
73886	24313	13537
24753	15241	47682

14°	15°	16°	17°
4132	2534	6297	3627
324	3241	3852	6245
5243	5013	5764	8517
3151	1465	2938	378
2435	4120	4376	456
5314	1354	8683	754
8521	2541	7425	132
4152	3213	3752	247
44	5427	5310	
2432			
3215			
5122			

(13)

18°	19°	20°
2.30	6.39	58..
.529	242.	3929
362.	12.8	.58.
11580	.371	8.15
	17058	20824

Dans ces trois dernières questions, la somme est indiquée, et l'on demande quels sont les chiffres qui sont remplacés par des points. Voici la manière de les résoudre.

N° 18. On voit que puisqu'à la somme des unités il y a un zéro, cette somme doit être 10 ou 20. Si c'était 20, le nombre remplacé par le point serait 11, ce qui ne peut pas être. La somme des unités est donc 10, et le point doit être 1. La somme des dizaines est 8. Celle des centaines doit être 15, car si elle était 25, le nombre remplacé par le point serait 14. A la place du point il faut donc 4 centaines. En effet, 6 + 5 + 4 font 15. On retient 1 mille. 1 + 2 + 3 font 6. La somme des mille étant 10, le point doit être remplacé par un 5.

Réponses aux applications de l'addition.

1° 705 fr. — 2° 2313 ans jusqu'à la fin de 1823. — 3° 5827 ans. (Toutes les dates sont calculées jusqu'à la fin de 1823.) — 4° 4179 ans. — 5° 2314 ans. — 6° 3007 ans. — 7° 1790. — 8° 84580 fr. — 9° 197 lieues. — 10° 36083 fr. — 11° 227093. — 12° 136655. — 13° 170051. — 14° 44085. — 15° 28908. — 16° 48397. — 17° 20356. — 18° 2430 + 6529 + 3621. — 19° 6039 + 2420 + 1228 + 7371. — 20° 5800 + 3929 + 2580 + 8515.

Théorie de l'addition.

(14) L'addition est une opération par laquelle on ajoute plusieurs nombres ensemble, et dont le résultat s'appelle *somme* ou *total*. Le mot total est plus usité dans le commerce. Les nombres se placent les uns sous les autres, et l'on additionne séparément chaque colonne, en commençant par celle des unités. On pourrait aussi commencer par la gauche. Lorsque la

somme des chiffres d'une colonne ne peut pas être écrite dans cette colonne; par exemple, si en additionnant les unités on reçoit une somme plus forte que 9, il faut retenir les dizaines pour les ajouter avec la colonne suivante, et n'écrire que l'excédant des unités. Il en est de même pour les autres colonnes.

Questions sur l'addition.

(15) 1° Qu'est-ce que l'addition? — 2° Comment appelle-t-on le résultat de l'addition? — 3° Dans quel cas se sert-on plus fréquemment du mot *total*? — 4° Comment dispose-t-on les nombres pour l'addition? — 5° Comment additionne-t-on? — 6° Est-il indifférent de commencer par la droite ou par la gauche? — 7° Que fait-on lorsque la somme des chiffres d'une colonne ne peut pas être écrite dans cette colonne?

Je ne donne pas les réponses à ces questions, parce qu'elles sont extrêmement simples.

§ III.

SOUSTRACTION.

(16) — Une personne avait dans sa bourse 34 fr., elle en dépense 22; combien lui reste-t-il?

Pour répondre à cette question, il faut ôter 22 fr. de 34 fr., ou, ce qui est la même chose, *soustraire* 22 de 34. L'opération que l'on fait alors s'appelle *soustraction*, et le nombre qui reste quand on a fait une soustraction se nomme *reste* ou *différence*. Le premier est principalement usité dans le commerce (VII).

Lorsque les nombres sur lesquels on opère sont petits, on peut, ainsi que pour l'addition, faire la soustraction de tête. Par exemple, il est bien facile de retrancher 22 de 34 ; mais lorsqu'ils sont forts, il faut avoir recours à une formule.

Supposons qu'on ait 344 à ôter de 689 : on place le plus petit nombre sous le plus fort, et l'on retranche chacun des chiffres du petit nombre des chiffres qui leur correspondent. Il faut avoir soin de ne pas omettre le signe de la soustraction qui se place à gauche :

$$\begin{array}{r} 689 \\ -\ 344 \\ \hline 345 \end{array}$$

Question. Est-il indifférent de commencer par la droite ou par la gauche ?

Il est facile de remarquer que jusqu'à présent cela est indifférent ; mais cependant on commence toujours par la droite, parce qu'il est des cas très-fréquents où l'on ne peut pas faire autrement, comme nous le verrons plus tard.

Observation. L'élève trouvera facilement la formule par analogie avec celle de l'addition, mais il n'en sera pas de même lorsqu'un des chiffres inférieurs ne pourra pas être retranché du chiffre supérieur. Il faut néanmoins lui proposer la difficulté, et lorsqu'il sera bien convaincu qu'il ne peut pas la surmonter lui-même, on la lui expliquera.

Pour ces sortes de questions, il existe deux méthodes qu'il est important de faire connaître à l'élève. Dans la plupart des traités d'arithmétique on se borne à celle des emprunts (VIII). Il faut aussi avoir soin de faire spécifier la valeur des chiffres comme on l'a fait dans l'addition. Ainsi l'élève dira pour la question précédente : 4 unités de 9 unités, il reste 5 unités; 4 dizaines de 8 dizaines, il reste 4 dizaines; 3 centaines de 6 centaines, il reste 3 centaines (VI).

(17) — *De 42 fr. on en dépense 24; combien reste-t-il?*

Dans cette question, 24 peut bien être soustrait de 42; mais on ne peut pas retrancher 4 unités de 2 unités.

Le moyen que l'on emploie pour la résoudre est fondé sur ce principe, *que la différence entre deux nombres ne change pas quand on ajoute la même quantité au nombre que l'on soustrait et au nombre dont on soustrait.* Par exemple :

9 moins 5 égale 4. Si l'on ajoute à 9 et à 5 la même quantité, 10, par exemple, on aura 19 moins 15 égale 4 : on voit que la différence n'a pas changé; il en est de même, quel que soit le nombre qu'on ajoute.

Revenons à l'exemple précédent :

$$\begin{array}{r} 42 \\ -\ 24 \\ \hline 18 \end{array}$$

Ne pouvant ôter 4 unités de 2 unités, on ajoute une dizaine aux 2 unités, ce qui en fait 12; 4 de 12 il en reste 8. Mais comme on a augmenté le nombre supérieur de 10, il faut aussi augmenter le nombre inférieur de la même quantité. On ajoute une dizaine aux 2 dizaines, ce qui en fait 3; 3 dizaines de 4 dizaines, il reste 1 dizaine.

Remarquez qu'il est indifférent d'ajouter 10 unités dans la colonne des unités, ou 1 dizaine dans celle des dizaines. Or, on a ajouté 10 unités au nombre supérieur et 1 dizaine au nombre inférieur, la différence doit donc être la même que si l'on n'avait rien ajouté :

25	44	57	51	80	90
— 16	— 25	— 18	— 33	— 29	— 36
9	19				

Pour rendre cette formule plus claire, écrivons les deux nombres 24 et 42 avec les signes dont nous nous sommes déjà servis :

XXXXII..........

xXXIIII

XIIIIIII

Les dix unités ajoutées au nombre supérieur sont figurées ici par dix points, et la dizaine ajoutée au nombre inférieur par un petit x.

Nous nous servirons de ce moyen toutes les fois que nous le pourrons pour rendre les opérations sensibles :

$$\begin{array}{r} 316 \\ -\ 225 \\ \hline 91 \end{array}$$

Dans cette question, ce sont les dizaines qui ne peuvent pas être retranchées des dizaines. Il faut supposer sur le 1 une centaine ou 10 dizaines, ce qui en fait 11; 2 dizaines de 11 dizaines il en reste 9. Mais comme on a ajouté une centaine au nombre supérieur, il faut en ajouter aussi une au nombre inférieur, 3 centaines de 3 centaines il ne reste rien.

$$\begin{array}{rrrrrr} 224 & 518 & 484 & 707 & 806 & 477 \\ -131 & -151 & -392 & -321 & -435 & -192 \\ \hline 93 & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} 319 & 367 & 244 & 135 & 276 & 127 \\ -.76 & -.76 & -\ 52 & -\ 44 & -.\ 9 & -\ .8 \\ \hline 243 & 291 & & & 267 & \end{array}$$

316—225.

$$\begin{array}{r} \text{xxxxx} \\ \text{xxxxx} \\ \text{CCCXIIIIII} \\ \text{cCCXXIIIII} \\ \hline \text{XXXXXXXXXI} \end{array}$$

Les dix dizaines ajoutées au nombre supérieur sont figurées par dix x, et la centaine ajoutée au nombre inférieur par un petit c.

On peut, par le même moyen, rendre sensibles toutes les opérations suivantes :

$$\begin{array}{r} 758 \\ -\ 279 \\ \hline 479 \end{array}$$

Dans cette question, il faut supposer sur les unités et sur les dizaines. Le 8 vaudra donc 18 unités, et le 5 15 dizaines. Il faudra aussi ajouter une dizaine et une centaine au nombre inférieur. Le 7 vaudra 8 dizaines, et le 2 vaudra 3 centaines.

$$\begin{array}{rrrrr} 350 & 700 & 2356 & 3578 & 3456 \\ -\ 261 & -\ 439 & -\ 277 & -\ 939 & -\ 1867 \\ \hline 89 & 261 & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 5000 & 6000 & 8092 & 24700 & 50000 \\ -\ 1792 & -\ 5999 & -\ 3973 & -\ 15871 & -\ 9788 \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

(18) L'autre manière de faire la soustraction est celle des emprunts :

$$\begin{array}{r} 42 \\ -\ 24 \\ \hline 18 \end{array}$$

4 ne pouvant pas être retranché de 2, on emprunte sur les 4 dizaines une dizaine que l'on ajoute aux 2 unités, ce qui en fait 12 ; 4 de 12 il reste 8. Les 4 dizaines ne comptent que pour 3, puisqu'on en a emprunté une : 2 dizaines de 3 dizaines, il reste 1 dizaine. Remarquez que, quoiqu'on ait aug-

menté les 2 unités du nombre supérieur, on n'ajoute rien aux 2 dizaines du nombre inférieur, parce que la quantité dont elles ont été augmentées n'est point étrangère au nombre. Ce qu'on leur a ajouté a été retranché des dizaines, le nombre a toujours la même valeur.

$$\begin{array}{r} 3561 \\ -\ 1789 \\ \hline 1772 \end{array}$$

Dans cette question, il faut emprunter trois fois : 9 unités de 1 unité, on ne peut pas ; on emprunte 1 dizaine qui vaut 10 unités : 9 de 11 il reste 2. 8 dizaines de 5 dizaines, on ne peut pas ; on emprunte une centaine qui vaut 10 dizaines, plus 5 dizaines, cela fait 15 dizaines : 8 de 15 il reste 7. 7 centaines de 4 centaines on ne peut pas ; on emprunte 1 mille qui vaut 10 centaines, plus 4 centaines, cela fait 14 centaines : 7 de 14 il reste 7. 1 mille de 2 mille il reste 1 mille.

$$\begin{array}{r} 99 \\ 3000 \\ -\ 1823 \\ \hline 1177 \end{array}$$

On ne peut pas emprunter sur les zéros, puisqu'ils n'ont aucune valeur ; mais on emprunte sur le premier chiffre significatif. Dans cette question, il faut emprunter 1 mille. Or, pour soustraire les unités, on n'a besoin que d'une dizaine : 3 unités de 10 unités il reste 7 unités. Puisque de ce mille que nous avions emprunté on n'a employé qu'une dizaine, il reste 990. On pose ces 9 centaines sur le zéro des centaines et les 9 dizaines sur le zéro des dizaines : on a donc, 2 dizaines de 9 dizaines il reste 7 dizaines. 8 centaines de 9 centaines il reste 1 centaine. 1 mille de 2 mille il reste 1 mille.

Ces opérations sont très-faciles à comprendre par le moyen que nous avons déjà employé. Reprenons l'exemple précédent : 3000—1823.

MM$\underline{\text{M}}$ccccccccxxxxxxxx,........

—MCCCCCCCCXXIII

MCXXXXXXXIIIIIII

Le mille que l'on emprunte est indiqué par un trait. Il se trouve converti en 9 centaines, 9 dizaines et 10 unités. Des 10 unités on en retranche 3, il en reste 7; des 9 dizaines on en ôte 2, il en reste 7; des 9 centaines on en ôte 8, il en reste 1; et de 2 mille on en ôte 1, il reste 1 mille.

$$\begin{array}{r} 300 \\ -\ 172 \\ \hline 128 \end{array}$$

(19) On peut encore faire cette soustraction de la manière suivante : 2 unités de zéro on ne peut pas; on emprunte 1 dizaine : 2 de 10 il reste 8. 7 dizaines de zéro on ne peut pas; on emprunte 1 centaine qui vaut 10 dizaines; mais comme on a déjà emprunté 1 di-

zaine, cette centaine ne doit plus être comptée que pour 9 : 7 dizaines de 9 dizaines, il reste 2 dizaines, etc.

Applications de la soustraction.

(20) 1° Un homme avait 8468 fr. de revenu, il en a maintenant 16936; on demande de combien il l'a augmenté?

2° Un homme avait en caisse 22000 fr., il en retire 9869 fr.; combien lui reste-t-il?

3° Un homme est né en 1740; quel âge a-t-il eu en 1820?

4° La première croisade se fit en 1096; combien y a-t-il d'années?

5° L'imprimerie fut inventée en 1435; combien y a-t-il d'années?

6° La révolution française commença en 1789; combien y a-t-il d'années?

7° L'Amérique fut découverte en 1493; combien y a-t-il d'années?

8° Homère vivait 1000 ans avant J.-C.; combien d'années après la création du monde? (Elle a eu lieu 4004 ans avant J.-C.)

9° Les murailles de la Chine furent construites 3730 ans après la création du monde; combien y a-t-il d'années?

10° Les paratonnerres furent inventés en 1763; combien y a-t-il d'années?

11° Les lunettes d'approche furent inventées en 1600; combien y a-t-il d'années?

12° Les télégraphes furent inventés en 1794; combien y a-t-il d'années?

13° Henri IV mourut en 1610; combien d'années avant la mort de Louis XVI, qui eut lieu en 1793?

14° Quelqu'un a gagné 428 francs en vendant des marchandises 5200 fr.; combien avait-il déboursé?

Combinaison de l'addition et de la soustraction.

15° J'étais débiteur de 1244 fr., et je n'avais que 930 fr., mais j'étais créancier d'une somme de 654 fr.; avec ces 654 fr. j'ai complété la somme que je devais; combien m'est-il resté?

16° J'ai trois créanciers : je dois à l'un 2500 fr., au second 840 fr., et au troisième 754 fr. J'ai deux débiteurs, dont l'un me doit 1800 francs et l'autre 2544 fr; j'ai en bourse 3768 fr.; mes fonds rentrés et mes dettes payées, que me reste-t-il?

17° Un détachement de 120 hommes perdit dans une escarmouche la moitié de ses soldats, dont 40 furent tués et 20 faits prisonniers. Les ennemis ont eu 25 hommes tués et 30 furent faits prisonniers. Ils sont maintenant 100 hommes, en comptant les prisonniers qu'ils ont faits; combien étaient-ils au commencement du combat?

18° Un marchand qui doit à une autre personne 1584 fr., doit en recevoir 4 billets, savoir : de 2240 fr., 384 fr., 529 fr. et 1450 fr. On lui retient ce qu'il doit, et on lui paie le surplus en billets de 1000 fr. et le reste en argent; on demande à combien se montait le paiement en argent?

19° Une personne doit à un marchand 5824 francs; elle prend chez lui pour 3588 fr. de marchandises, et lui donne en paiement 6500 fr.; combien lui doit-elle encore?

20° Un homme a emprunté en différentes fois les sommes suivantes, savoir : 356 fr., 699 fr. et 1000 fr. Il rembourse en différentes fois 200 fr., 255 francs, 384 fr., et emprunte de nouveau 1620 fr.; combien doit-il encore?

21° Un homme avait à faire un voyage de 285 lieues. Il apprend en route qu'il doit aller à 64 lieues plus loin, quelle est la longueur de son voyage et combien a-t-il fait de lieues, s'il lui en faut encore faire 212 pour arriver à sa destination?

22° Une personne devait une certaine somme. Elle a donné à-compte 284 fr., 570 fr., 210 fr. et 345 fr.; on demande à connaître cette somme, sachant qu'elle a donné en dernier paiement un billet de 1000 fr., et qu'on lui a rendu 454 fr.?

Réponses et solutions des problèmes précédents.

1° 8468. — 2° 12131. — 3° 80 ans. — 4° 727 ans. (Toutes les dates sont calculées jusqu'à la fin de 1823). — 5° 388 ans. — 6° 34 ans. — 7° 330 ans. — 8° 3004 ans. — 9° 2097 ans. — 10° 60 ans. — 11° 223 ans. — 12° 29 ans. — 13° 183 ans. — 14° 4772 fr.

15° 930 fr. que j'ai + 655 fr. qu'on me doit = 1584, — 1244 que je dois = 340.

16° Je dois 2500 fr. + 840 fr. + 754 fr. = 4094 fr. On me doit 1800 fr. + 2544 fr.; + 3768 fr. que j'ai en bourse $=8112$ fr. $8112-4094$ que je dois $=4018$ fr. qui me restent après mes dettes payées.

17° 100 hommes $+25$ qui furent tués $+30$ qui furent faits prisonniers $=155$ h. -20 prisonniers de l'autre parti, il reste 135 hommes. Les ennemis étaient donc au commencement de l'action au nombre de 135.

18° $2240+384+529+1450=4603$, -1584 $=3019$ fr. que l'on paie en billets de 1000 fr., et le surplus en argent. Il faut 3 billets et 19 francs en argent.

19° Elle doit encore 2912 fr.

20° Il doit encore 2836 fr.

21° Il a fait 137 lieues.

22° 2955 fr.

Preuves de l'addition et de la soustraction.

$$12+13+6=31.$$

(21) *Addition.* La somme des trois nombres 12, 13, 6 est 31; si de cette somme on retranche successivement les nombres 12, 13 et 6, il est clair qu'il ne doit rien rester si l'opération est bien faite. Voici donc un moyen de s'assurer de l'exactitude d'une addition. Cette seconde opération, que l'on fait pour s'assurer de l'exactitude de l'opération principale, s'appelle *preuve*.

Vérifiez par ce moyen les opérations suivantes :

$$
\begin{array}{r}
234 \\
329 \\
36 \\
\hline
599 \\
-\ 234 \\
\hline
365 \\
-\ 329 \\
\hline
36 \\
-\ 36 \\
\hline
00
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
341 \\
511 \\
25 \\
20 \\
\hline
887
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
212 \\
327 \\
400 \\
50 \\
\hline
989
\end{array}
$$

On voit qu'il faut faire autant de soustractions qu'il y a de nombres à ajouter. On voit encore que, s'il y a beaucoup de nombres, la preuve est plus longue et plus sujette aux erreurs que l'opération principale. Il est donc nécessaire d'avoir un moyen plus simple.

$$
\begin{array}{r}
221 \\
353 \\
214 \\
\hline
788
\end{array}
$$

Si l'on ajoute de nouveau les nombres 221, 353 et 214 en commençant par les centaines, et si l'on ôte ces centaines de la somme des centaines du total, il ne restera rien pour cette colonne. En effet, 2 centaines $+$ 3 centaines $+$ 2 centaines $=$ 7 centaines; si l'on ôte ces 7 centaines des 7 centaines du total, il ne reste rien. Si l'on opère de même pour les dizaines et pour les unités, on verra que le reste est nul, et que par conséquent l'opération est exacte.

(22) Mais il se peut qu'en ajoutant les unités on ait obtenu des dizaines; de même, en ajoutant les dizaines, on peut avoir reçu des centaines, comme dans l'exemple suivant :

$$\begin{array}{r} 571 \\ 253 \\ 107 \\ \hline 931 \\ \scriptstyle 110 \end{array}$$

Les 9 centaines proviennent de l'addition des centaines, plus 1 centaine que l'on avait retenu en additionnant les dizaines.

Si l'on ôte 5 c. + 2 c. + 1 c. de 9 centaines, il restera 1 centaine que l'on place sous le 9; mais comme cette centaine provient de l'addition des dizaines, on l'ajoute par la pensée à la somme de ces dernières, ce qui fait 13 dizaines. De ces 13 dizaines on retranche 7 dizaines + 5 dizaines, il reste 1 dizaine que l'on pose sous ce 3, et l'on efface la centaine qui est maintenant inutile. Comme cette dizaine provient de l'addition des unités, on l'ajoute à celles-ci par la pensée, ce qui fait 11. 1 + 3 + 7 de 11, il ne reste rien, donc l'opération est exacte.

(23) Voici encore un autre moyen de faire la preuve de l'addition, mais qui n'est pas aussi simple que celui que nous venons d'indiquer.

Si, après avoir ajouté les 3 nombres 271, 253 et 107, on fait abstraction d'un de ces nombres, par exemple de 571, et que l'on ajoute les deux autres nombres 253 et 107, on aura pour somme 360. Si l'on ôte cette somme 360 de la somme totale de 931, il est clair qu'il doit rester 571, nombre que l'on avait d'abord retranché; dans ce cas l'opération est exacte.

La preuve de l'addition est fondée sur cet axiome, que si d'un tout on retranche toutes les parties, il ne reste rien. La somme totale est dans l'addition un tout dont les sommes partielles sont les parties constituantes.

On peut prendre, pour s'exercer, des exemples dans les applications de l'addition, n° (12).

(24) *Soustraction.* Si l'on ôte 12 de 25, il restera 13, et si l'on ajoute ce reste 13 avec le nombre 12 que l'on a retranché, on recevra 25.

Ce principe est si simple, qu'il n'a pas besoin d'autre démonstration pour être compris. On conclut donc de cette observation que, lorsqu'après avoir ajouté le reste avec le nombre que l'on a soustrait, on reçoit le nombre dont on a soustrait, l'opération est exacte. Telle est la manière d'en faire la preuve.

$$\begin{array}{r} 2525 \\ -\ 1784 \\ \hline 741 \\ +\ 1784 \\ \hline 2525 \end{array}$$

On s'exercera sur les applications de la soustraction, n° (20), et sur les exemples renfermés dans le n° (17).

Théorie de la soustraction.

(25) La soustraction est une opération par laquelle on retranche un nombre d'un autre, ce qui reste s'appelle *reste* ou *différence.* La première de ces deux expressions est la plus usitée dans le commerce. On soustrait un nombre en ôtant les unités des unités, les dizaines des dizaines, les centaines des centaines. A cet effet on place les deux nombres l'un au dessous de l'autre, le plus petit en bas. On fait ensuite un trait horizontal pour les séparer du reste, que l'on écrit au dessous.

Si un chiffre du nombre inférieur ne pouvait pas être retranché du chiffre correspondant supérieur, il faudrait ajouter à ce chiffre une dizaine si ce sont des unités que l'on soustrait, une centaine si ce sont des dizaines, etc. Mais comme on a augmenté le nombre supérieur de 10, 100 ou 1000, il faut augmenter le nombre inférieur de la même quantité, en ajoutant une dizaine *dans la colonne des dizaines*, si c'est une dizaine que l'on a ajouté au nombre supérieur, ou une centaine dans la colonne des centaines, etc. Cette méthode est fondée sur ce principe, que la différence entre deux nombres ne varie pas, lorsqu'on ajoute la même quantité au nombre que l'on soustrait et au nombre dont on soustrait. On obtient le même résultat en empruntant sur le premier chiffre significatif à gauche; dans ce cas le nombre inférieur reste tel qu'il est.

La preuve de l'addition est fondée sur cet axiome, qu'en retranchant toutes les parties d'un tout, il ne reste rien. Elle se fait ordinairement en retranchant la somme de chaque colonne de la somme correspondante dans le produit.

La preuve de la soustraction se fait en ajoutant le reste au nombre que l'on a soustrait, et l'on doit recevoir le nombre dont on a soustrait.

Questions sur la soustraction et sur les deux premières preuves.

(26) 1° Qu'est-ce que la soustraction? — 2° Comment appelle-t-on le nombre qui reste quand on a fait une soustraction? — 3° Comment dispose-t-on les nombres pour que la soustraction soit plus facile à opérer? — 4° Quelle difficulté peut présenter la soustraction? — 5° Combien y a-t-il de moyens de résoudre la difficulté que peut présenter la soustraction? — 6° Quelle est celle de ces deux méthodes qui est fondée sur un principe mathématique, et quel est ce principe? — 7° Soustrayez des deux manières les nombres suivants : 3226 de 6133, et 2312 de 6000? — 8° Qu'est-ce que c'est que la preuve d'une opération? — 9° Sur quel principe est fondée la preuve de l'addition? — 10° De combien de manières peut-on faire la preuve de l'addition, et quelle est la plus sûre et en même temps la plus simple? — 11° Comment se fait la preuve de la soustraction?

Réponses aux questions précédentes.

1° C'est une opération par laquelle on retranche un nombre d'un autre. — 2° Reste ou différence. — 3° On les place l'un sous l'autre, le plus faible en bas. — 4° Lorsqu'un des chiffres du nombre inférieur ne peut pas être soustrait du chiffre correspondant dans le nombre supérieur. — 5° Il y a deux moyens de résoudre cette difficulté. Le premier en ajoutant une certaine quantité au chiffre qui est trop faible dans le nombre supérieur, et en ajoutant la même quantité au nombre inférieur (17). Le second moyen est d'emprunter sur le chiffre voisin à gauche. — 6° La méthode par laquelle on suppose la même quantité au nombre que l'on soustrait et au nombre dont on soustrait est fondée sur ce principe, que la différence entre deux nombres ne change pas lorsqu'on ajoute la même quantité à chacun de ces nombres. — 7° 6133. — 3226 = 2907, 6000 — 2312 = 3688. — 8° La preuve est une opération secondaire que l'on fait pour s'assurer de l'exactitude de l'opération principale. — 9° La preuve de l'addition est fondée sur cet axiome, qu'en retranchant toutes les parties d'un tout il ne reste rien. — 10° Il y a deux manières de faire la preuve de l'addition. La plus simple est de retrancher la somme de chaque colonne de la somme correspondante dans le total. — 11° La preuve de la soustraction se fait en ajoutant le reste au nombre retranché; on doit trouver pour somme le nombre dont on a soustrait.

§ IV.

MULTIPLICATION.

(27) *Une personne dépense* 6 *fr. par jour; combien dépensera-t-elle en* 8 *jours?*

Il est clair qu'il faut répéter 6 autant de fois qu'il y a de jours, ou autant de fois qu'il y a d'unités dans 8. Par conséquent elle dépensera 8 fois 6 fr. ou 48 fr.

Répéter un nombre plusieurs fois s'appelle *multiplier*, et l'opération que l'on fait s'appelle *multiplication*.

La multiplication est donc une opération par laquelle on répète un nombre autant de fois qu'il y a d'unités dans un autre nombre.

Le nombre que l'on multiplie, ou qui est répété, s'appelle *multiplicande*, et celui qui indique combien de fois on répète le multiplicande s'appelle *multiplicateur* (*).

Le nombre que l'on obtient quand on a fait une multiplication s'appelle *produit*.

Quest. Dans la question précédente, quel est le multiplicande, quel est le multiplicateur, et quel est le produit?

(*) Le premier de ces deux noms vient du participe latin *multiplicandus* (devant être multiplié). Le second est formé de *multiplicare* (multiplier), auquel on a donné la finale *eur*, qui indique ordinairement une personne ou une chose qui fait une action.

Le multiplicande et le multiplicateur prennent le nom commun de *facteurs* du produit. Ainsi 3 et 4 sont facteurs de 12, parce que multipliés l'un par l'autre ils donnent 12 pour produit ; mais 6 et 6 ne sont point facteurs de 12, parce qu'en les multipliant l'un par l'autre on ne reçoit pas 12, mais 36.

Les nombres qui, comme 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc., n'ont d'autres facteurs qu'eux-mêmes et l'unité, se nomment nombres *premiers*. 19 est un nombre premier, parce qu'on ne peut le composer par la multiplication que par 19 fois 1 ou 1 fois 19. 21, au contraire, n'est point un nombre premier, parce qu'on peut le composer par 7 fois 3 (*).

Tous les nombres qui ne sont pas premiers, c'est-à-dire qui peuvent avoir d'autres facteurs qu'eux-mêmes et l'unité, ou qui en contiennent un autre un nombre exact de fois, s'appellent *multiples*. Ainsi 21 est multiple de 7 et de 3. 20 est multiple de 10, de 5, de 4 et de 2, parce que tous ces nombres sont contenus un nombre exact de fois dans 20.

Par opposition, 10, 5, 4 et 2 sont appelés *sous-*

(*) On trouve une table des nombres premiers et de tous les facteurs des nombres multiples jusqu'à 100, pag. 99 du deuxième Cours, Ier vol. Cette table est bornée au nombre cent pour l'usage du deuxième Cours, mais il y en a une beaucoup plus étendue à la fin de ce volume. Elle peut être d'une très-grande utilité pour la réduction des fractions à leur plus simple expression, et éviter des tâtonnements inutiles. Si l'un des deux termes d'une fraction se trouve dans cette liste, on sait, par le n° 63, qu'elle est irréductible.

multiples de 20. Ainsi tout nombre peut-être sous-multiple d'un autre nombre dont il est facteur.

(28) *Si une lieue a 2283 toises, combien y a-t-il de toises dans six lieues?*

Il faut répéter 2283 toises 6 fois ou autant de fois qu'il y a d'unités dans 6. 2283 est donc le multiplicande et 6 le multiplicateur.

$$\begin{array}{r} 2283 \\ 2283 \\ 2283 \\ 2283 \\ 2283 \\ 2283 \\ \hline 13698 \end{array}$$

Mais si l'on demandait combien il y a de toises d'ici à la lune, dont la distance à la terre est de 86,000 lieues, il faudrait répéter 86,000 fois le multiplicande, c'est-à-dire faire une addition de 86,000 nombres ; opération qui serait de la dernière difficulté. Mais on a un moyen abrégé que nous allons développer.

Multiplication proprement dite.

(29) Si les revenus d'une personne se montent à 2223 fr. par an, combien cela fait-il au bout de 3 ans?

L'opération se dispose de la manière suivante :

$$\begin{array}{rl} 2223 & \text{multiplicande.} \\ \times \quad 3 & \text{multiplicateur.} \\ \hline 6669 & \end{array}$$

On répète trois fois les unités, qui font 9 unités que l'on écrit sous la colonne des unités. On répète de même 3 fois les dizaines, les centaines et les mille. On écrit ces produits partiels dans leurs colonnes respectives, et l'on a pour produit total 6669 fr.

Observation. On suivra, pour les solutions de toutes les questions que l'on proposera dans le commencement de cette opération, le même procédé que pour les opérations précédentes ; c'est-à-dire qu'on fera spécifier la valeur des chiffres que l'on pose. Ainsi l'élève dira : 3 fois 3 unités font 9 unités, je pose 9 unités dans la colonne des unités. 3 fois 2 dizaines font 6 dizaines que je pose dans la colonne des dizaines. 3 fois 2 centaines font 6 centaines que je pose dans la colonne des centaines, etc.

$$\begin{array}{r} 2114 \\ \times \quad 3 \\ \hline 6342 \end{array}$$

Cet exemple présente une petite difficulté qu'un élève un peu intelligent surmontera de lui-même ; c'est que le produit des unités contient une dizaine. Cette dizaine s'ajoute au produit des dizaines. Dans la solution on dira donc : 3 fois 4 unités font 12 unités ; 12 unités font 1 dizaine et 2 unités je pose 2 unités dans la colonne des unités, et je retiens 1 dizaine. 3 fois 1 dizaine font 3 dizaines, plus 1 dizaine que j'ai retenue, font 4 dizaines que je pose dans la colonne des dizaines, etc.

Il en sera de même si le produit des dizaines contient des centaines, si celui des centaines contient des mille, etc.

$2341 \times 4 = 9364$	$71008 \times 7 = 497056$
$4200 \times 5 = 21000$	$96230 \times 8 = 769840$
$5301 \times 6 = 31806$	$11006 \times 9 = 99054$

On est quelquefois embarrassé sur la nature des unités du produit ; mais il suffit d'examiner la question pour la reconnaître. Dans celle-ci, par exemple : *Un ouvrier gagne* 6 *fr. par jour, combien gagnera-t-il en* 44 *jours?* R. 264 fr. : 6 fr. est le multiplicande et 44 jours le multiplicateur ; mais quelle que soit la nature des unités du multiplicateur, le produit sera toujours 264 fr. On voit donc d'après cette observation que le multiplicateur peut toujours être considéré comme un nombre abstrait, et que les unités du produit sont de même nature que celles du multiplicande.

(30) On voit d'après ce qui a précédé, que la multiplication se réduit à multiplier chaque chiffre en particulier. Pour le faire avec facilité, il faut savoir multiplier les 9 premiers nombres entre eux, ce que l'on appelle ordinairement savoir sa table de multiplication, alors l'opération n'a rien qui puisse embarrasser. On peut donner à cette table différentes dispositions. Il y en a une dans le deuxième Cours, page 95. Sa disposition est plus facile à comprendre pour des enfants, c'est pourquoi je l'ai adoptée dans le deuxième Cours ; mais la plus simple et la plus commode est la suivante, parce que toutes les combinaisons sont réunies dans un petit espace.

Table de Pythagore.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Voici quelle est la disposition de cette table. Le rang horizontal supérieur peut être regardé comme multiplicande et la première colonne à gauche comme multiplicateur. Dans le deuxième rang horizontal, chacun des 9 chiffres se trouve répété deux fois. Dans le troisième, ils sont répétés 3 fois, etc.

Si donc on veut avoir le produit de 7 fois 8, par exemple, il faut chercher 8 dans le rang horizontal supérieur, et descendre jusqu'à ce qu'on soit sur le septième rang indiqué par le 7 qui se trouve dans la première colonne ; on trouve 56 pour produit. En un mot, le carré où se rencontrent la colonne verticale du multiplicande et le rang horizontal du multiplicateur est celui où se trouve le produit.

On pourrait considérer les nombres de la première colonne verticale comme multiplicandes, et ceux du rang supérieur comme multiplicateurs, sans que cela changeât rien aux produits.

(31) *1 pied vaut 12 pouces; combien 223 pieds font-ils de pouces?*

$$\begin{array}{r} 223 \\ \times\ 12 \\ \hline 446 \\ 223 \\ \hline 2676 \end{array}$$

Pour multiplier 223 par 12, il faut le multiplier deux fois; d'abord par 2 unités, ce qui donne le produit 446, ensuite par une dizaine, ce qui donne 223 dizaines. La somme de ces deux produits partiels est 2676 pouces.

Pour multiplier par une dizaine, on s'y prend comme si l'on multipliait par une unité, en observant de mettre le premier chiffre à droite du produit dans la colonne des dizaines. La raison en est facile à saisir, car il est clair qu'une dizaine de fois 3 unités donne 3 dizaines, que l'on place dans la colonne des dizaines. Une dizaine de fois 2 dizaines font 2 centaines, que l'on place dans la colonne des centaines.

Une dizaine de fois 2 centaines font 2 mille, que l'on place dans la colonne des mille.

Observation. Lorsque l'élève aura la clé de la marche à suivre pour ces sortes d'opérations, il faudra l'abandonner un peu à ses propres forces, et lui proposer de résoudre seul les questions suivantes, ce qu'il fera sans peine avec un peu de réflexion. Il n'éprouvera pas plus de difficulté à multiplier par trois ou quatre chiffres que par deux. Il faudra de même lui présenter l'exemple dans lequel on multiplie par 203, il en trouvera facilement la solution.

$$464 \times 15 = x. \quad 7204 \times 44 = x.$$
$$327 \times 21 = x. \quad 1236 \times 58 = x.$$
$$1200 \times 24 = x. \quad 78000 \times 27 = x.$$
$$3660 \times 32 = x. \quad 80000 \times 22 = x.$$

Si l'on a 2235 à multiplier par 111, ou à répéter 111 fois, il faut opérer trois multiplications. La première par l'unité, ce qui donne pour premier produit 2235. La deuxième par une dizaine, dont le produit est 2235 dizaines. La troisième par une centaine, dont le produit est 2235 centaines. La somme de ces trois produits partiels donne le produit total 248085. On mutiplie par des centaines comme si l'on multipliait par des unités, en observant seulement de placer le premier chiffre à droite du produit des centaines dans la colonne des centaines.

$$7100 \times 222 = x. \quad 5000 \times 440 = x.$$
$$1935 \times 318 = x. \quad 25700 \times 734 = x.$$
$$844 \times 212 = x. \quad 30090 \times 178 = x.$$

1212×203 3636 24240 246036	$280 \times 108 = x.$ $3691 \times 409 = x.$ $7000 \times 507 = x.$ $8100 \times 205 = x.$

Dans cet exemple, le multiplicateur n'a point de dizaines ; le produit par les dizaines doit être nul, et il faut passer de suite à la multiplication par les centaines, en plaçant le premier chiffre du produit dans la colonne des centaines.

33700×1224 134800 67400 67400 33700 41248800	$2460 \times 2821 = x.$ $70000 \times 3004 = x.$ $5624 \times 5087 = x.$ $3678 \times 2402 = x.$ $12579 \times 4669 = x.$ $16780 \times 9903 = x.$

La multiplication par quatre chiffres ne diffère de la multiplication par trois, qu'en ce qu'il faut opérer quatre multiplications au lieu de trois. Du reste le procédé est le même. On multiplie par les mille comme par des unités, en ayant soin de mettre le premier chiffre du produit dans la colonne des mille.

Différentes manières de simplifier la multiplication.

Multiplier par 10, 100, 1000, 10000.

(32) On sait, d'après le système de numération,

que la valeur des chiffres devient de 10 en 10 fois plus grande à mesure qu'ils avancent d'un rang vers la gauche. Or, on comprendra facilement qu'en ajoutant un zéro à la droite d'un nombre, la valeur de chaque chiffre devient 10 fois plus forte ; que par conséquent tout le nombre est rendu 10 fois plus grand, ou a été multiplié par 10; car le chiffre qui était dans la colonne des unités se trouve dans celle des dizaines; celui qui était dans la colonne des dizaines se trouve dans celle des centaines, etc. Si, au lieu d'un zéro, on en mettait 2, 3, 4, etc., chaque chiffre étant reculé de 2, 3 ou 4 rangs, le nombre aurait été multiplié par 100, 1000 ou 10000.

D'où l'on conclut que, *pour multiplier un nombre par* 10, 100, 1000, 10000, *etc. Il suffit d'ajouter à la droite de ce nombre* 1, 2, 3 *ou* 4 *zéros.*

Observations. Voici la manière dont l'instituteur doit présenter l'observation précédente, et comment il doit s'y prendre pour amener l'élève à découvrir lui-même la règle qu'il doit suivre pour ces sortes de multiplications. Il place un nombre quelconque devant l'élève, et l'interroge sur la valeur de chacun des chiffres. Il ajoute ensuite un zéro à droite et l'interroge de nouveau. L'élève voit que cette valeur est devenue dix fois plus forte ; d'où il conclut que pour multiplier par 10, etc. L'instituteur lui demandera ensuite de combien le nombre est augmenté quand on ajoute 2 zéros. Peut-être répondra-t-il qu'il est devenu 20 fois plus grand ; mais il sera facile de lui faire découvrir son erreur en s'y prenant comme on l'a fait pour 10.

— 1 franc vaut 100 centimes; combien 600 francs vaudront-ils de centimes? *R.* 60000.

— 1 quintal pèse 100 livres ; combien 6784 quintaux pèsent-ils de livres? *R.* 678400.

— 1 siècle a 100 ans; combien y a-t-il d'aneées dans 34 siècles? *R.* 3400.

— 1 mètre vaut 10 décimètres; combien 300 mètres contiennent-ils de décimètres? *R.* 3000.

(33) — Combien 321 livres font-elles de sous?

$$\begin{array}{r} 321 \\ 20 \\ \hline 000 \\ 642 \\ \hline 6420 \end{array}$$

Lorsque dans les exemples précédents il se trouvait un zéro dans le milieu du multiplicateur, nous avons vu que le produit de ce zéro était nul, et qu'on passait immédiatement au premier chiffre significatif. Or, dans le cas dont il s'agit ici, le produit provenant de la multiplication par les unités est nul ; c'est pourquoi nous l'avons remplacé par des zéros. On multiplie ensuite par 2 dizaines, comme si c'étaient des unités, en observant de mettre le premier chiffre du produit dans la colonne des dizaines. On pourrait aussi se dispenser de mettre ces 3 zéros qui tiennent la place du produit des unités, en disposant l'opération de la manière suivante :

$$\begin{array}{r} 321 \\ \times \quad 20 \\ \hline 6420 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 344 \\ \times \quad 120 \\ \hline 6880 \\ 344 \\ \hline 41280 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 268 \\ \times \quad 30000 \\ \hline 8040000 \end{array}$$

Dans le dernier de ces exemples, on multiplie par 3 dizaines de mille comme par 3 unités ; mais comme on reçoit 804 dizaines de mille, on les réduit en unités, en ajoutant à la droite 4 zéros.

Voici une autre manière d'expliquer cette opération. 321×20 ; si l'on retranche le zéro du multiplicateur 20, on rendra ce multiplicateur 10 fois plus petit, et dans ce cas le produit sera aussi 10 fois trop petit. On le rendra 10 fois aussi grand, en ajoutant à sa droite le zéro qu'on avait retranché du multiplicateur.

Dans le troisième exemple, en faisant abstraction des 4 zéros du multiplicateur, on obtient un produit dix mille fois trop petit. On lui rend sa véritable valeur en le rendant dix mille fois aussi grand, c'est-à-dire en ajoutant les 4 zéros du multiplicateur.

$524 \times 30 = x.$ $\qquad 7806 \times 900 = x.$
$5824 \times 930 = x.$ $\qquad 3458 \times 8000 = x.$
$6743 \times 220 = x.$ $\qquad 17458 \times 9400 = x.$
$1704 \times 400 = x.$ $\qquad 30729 \times 12000 = x.$

— Une livre pèse 16 onces ; combien 12000 livres en pèseront-elles ?

$$
\begin{array}{r}
12000 \\
\times \quad 16 \\
\hline
72000 \\
12000 \\
\hline
192000
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
12000 \\
\times \quad 16 \\
\hline
72 \\
12 \\
\hline
192000
\end{array}
$$

Si le multiplicande est terminé par des zéros, on peut, comme dans l'exemple précédent, en faire abstraction et les ajouter au produit; car si je considère le multiplicande comme 12 unités, j'aurai pour produit 192 unités. Mais ce produit est mille fois trop petit, parce que j'ai rendu le multiplicande mille fois plus petit. Je le rendrai mille fois plus grand en ajoutant à sa droite les 3 zéros que j'avais retranchés.

(34)

$$
\begin{array}{r}
20 \\
\times \quad 30 \\
\hline
00 \\
60 \\
\hline
600
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
2 \\
\times\ 3 \\
\hline
600.
\end{array}
$$

En retranchant le zéro du multiplicateur, on sait qu'on obtient un produit 10 fois trop petit. En retranchant celui du multiplicande, le produit est aussi 10 fois trop petit. *D'après cela, de combien l'aura-t-on diminué si l'on retranche les 2 zéros?* Beaucoup d'élèves se trompent à cette question, et répondent qu'il est 20 fois trop petit; mais il est facile de sentir que les 2 nombres devant être multipliés l'un par l'autre, le produit doit être 10 fois 10 fois trop petit, ou 100 fois trop petit, et pour le rendre 100 fois aussi grand, il faut ajouter ces 2 zéros à la fin du produit.

Après avoir répété cette observation sur d'autres exemples analogues, on en conclura que lorsque les deux facteurs sont terminés par des zéros, on peut, pour abréger l'opération, faire abstraction de ces zéros, et en ajouter un nombre égal à la fin du produit.

```
      320000           320000
    × 60000          × 60000
  -----------      -------------
       000000      19200000000
      000000
     000000
    000000
  1920000
  -----------
  19200000000
```

Applications de la multiplication.

(35) 1° Combien une année contient-elle d'heures? (Une année = 365 jours (*); 1 jour = 24 heures.)

2° Combien 30 ans valent-ils d'heures?

3° Combien 3 ans contiennent-ils de minutes?

4° Combien une lieue contient-elle de pieds, pouces ou lignes (**)?

(*) Ou plus exactement, 365 jours 5 heur. 48 min. 48 sec.

(**) Une lieue de poste contient 2000 toises; une lieue ma-

5° Combien y a-t-il de deniers dans 356 livres?

6° Combien une livre pèse-t-elle de grains (*)?

7° Combien 3550 fr. font-ils de centimes?

8° Le globe terrestre a 360 degrés de circonférence; chaque degré est de 25 lieues à l'équateur; combien la terre a-t-elle de lieues de circonférence?

9° Combien la terre a-t-elle de toises de circonférence?

10° Le mètre est la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre; combien la terre a-t-elle de mètres de circonférence?

11° La distance de la terre à la lune est de 86000 lieues; combien cela fait-il de toises?

12° Un courrier est allé de Paris à Lisbonne en 29 jours, en faisant 12 lieues par jour; quelle est la distance de ces deux villes?

13° Combien l'aiguille des secondes d'une montre fait-elle de fois le tour du cadran en un an?

14° Une pompe fait monter de l'eau dans 4 tuyaux; chacun de ces tuyaux alimente 10 fontaines; chaque fontaine donne 2 voies d'eau par minute; on demande combien toutes ces fontaines ont fourni d'eau pendant 24 heures?

15° Dans un incendie on a formé une chaîne de 300 personnes. On passe à chacune 4 seaux par minute;

---

rine contient 2854 toises, et la lieue terrestre de 25 au degré en contient 2282.

(*) Une livre égale 16 onces; une once égale 8 gros; 1 gros égale 72 grains.

combien en a-t-on passé pendant 2 heures qu'a duré l'incendie?

16° Combien y a-t-il de pages dans un ouvrage in-8° pour lequel on a employé 2 rames de papier (*)?

Combinaison de la multiplication avec les deux premières opérations.

17° On a acheté 244 aunes de drap à 36 fr. l'aune, et 320 aunes à 40 fr.; pour combien en a-t-on acheté?

18° Un marchand a vendu dans un mois 122 aunes de toile à 6 fr., 223 aunes d'une autre qualité à 8 fr., 84 aunes de drap à 44 fr., et 90 aunes de drap d'une autre qualité à 38 fr.; pour combien a-t-il vendu?

19° Un marchand achète 84 aunes d'étoffe à 12 fr., et la revend à raison de 15 fr. l'aune; combien a-t-il vendu la totalité, et combien a-t-il gagné?

20° Un marchand vend pour 4608 fr. 128 aunes de drap qui lui coûte 40 fr. l'aune; a-t-il gagné ou perdu?

21° Quelqu'un a vendu 28 aunes d'étoffe à 12 fr. l'aune, et a gagné 3 fr. par aune; combien a-t-il vendu la totalité, et combien a-t-il gagné?

22° Dans une maison de commerce on emploie 10 commis, dont 2 sont à raison de 1000 fr., 5 à raison de 500 fr., et 3 à raison de 400 fr.; deux autres employés pour la tenue des livres et la correspondance

---

(*) Une rame contient 20 mains; une main contient 25 feuilles; une feuille in-8° donne 16 pages.

à 1200 fr.; 2 domestiques à 200 fr. Le loyer de la maison est de 2000 fr. La dépense totale pour la nourriture est de 3000 fr. par an. Dans un an on a vendu pour 66000 fr., sur quoi on avait déboursé 30000 fr.; y a-t-il eu gain ou perte?

23° Une pompe fait monter de l'eau dans 4 tuyaux; chacun de ces tuyaux alimente 12 fontaines; 30 de ces fontaines coulent pendant 48 heures et fournissent 2 voies par minute; les 18 autres ne coulent que pendant 24 heures et fournissent 3 voies par minute; combien ont-elles donné d'eau en tout?

Réponses et solutions des problèmes précédents.

1° 365 jours × 24 = 8760 heures.

2° 1 an = 8760 heures × 30 = 262800 heures.

3° 365 jours = 8760 heures × 60 = 525600 minutes × 3 ans = 1576800 minutes.

4° 1 lieue = 2282 toises × 6 = 13692 pieds.

5° 356 liv. × 20 × 12 = 85440 deniers.

6° 1 liv. = 16 onces. 16 × 8 × 72 = 9216 grains.

7° 3550 × 100 = 355000 centimes.

8° 360 × 25 = 9000 lieues.

9° 360 × 25 × 2282 = 20538000 toises.

10° 10000000 × 4 = 40000000 de mètres.

11° 86000 × 2282 = 196252 toises.

12° 29 × 12 = 348 lieues.

13° 525600 fois.

14° 115200 voies d'eau.

15° 144000 seaux.

16° 2 rames $=$ 40 mains $\times$ 25 $=$ 1000 feuilles $\times$ 16 $=$ 16000 pages.

17° $244 \times 36 = 8784$ fr. $320 \times 40 = 12800$ fr. $8784 + 12800 = 21584$ fr.

18° $122 \times 6 = 732$ fr. $223 \times 8 = 1784$ fr. $84 \times 44 = 3696$ fr. $38 \times 90 = 3420$ fr. $732 + 1784 + 3696 + 3420 = 9632$ fr.

19° 84 aunes à 15 fr. $=$ 1260 fr. Il gagne 3 fr. par aune, sur la totalité il gagnera $3 \times 84 = 252$ fr.

20° Les 128 aunes à 40 fr. coûtent 5120 fr. On les revend pour 4608 fr., donc on a perdu $5120 - 4608 = 512$ fr.

21° 28 aunes à 12 fr l'aune $=$ 336 fr.; sur quoi on a gagné 28×3 fr. $=$ 84 fr.

22° 2 commis à 1000 fr.	2000 fr.
5 *id.* à 500 fr.	2500
3 *id.* à 400 fr.	1200
2 employés pour la tenue des livres et la correspondance.	2400
2 domestiques à 200 fr.	400
Loyer de la maison.	2000
Nourriture par an.	3000
Total.	13500 fr.

Vendu pour 66000 fr., dont 30000 de déboursé. Il reste 36000 fr. de bénéfice sur les marchandises, duquel il faut soustraire les dépenses ci-dessus.

$$\begin{array}{r} 36000 \\ -\ 13500 \\ \hline 22500 \end{array}$$ bénéfice net.

23° 48 heures $\times$ 60 = 2880 minutes $\times$ 2 = 5760 voies par fontaine en 48 heures. 5760 $\times$ 30 = 172800 voies fournies par 30 fontaines en 48 h.

24 heures $\times$ 60 = 1440 min. $\times$ 3 = 4320 voies par fontaine en 24 heures. 4320 $\times$ 18 = 77760 voies fournies par 18 fontaines en 18 heures.

172800 + 77760 = 250560 voies en tout.

Théorie de la multiplication.

(36) La multiplication est une opération par laquelle on répète un nombre autant de fois qu'il y a d'unités dans un autre nombre. Le nombre que l'on multiplie se nomme *multiplicande*, et celui qui indique combien de fois on répète le multiplicande se nomme *multiplicateur*. Ils prennent le nom commun de *facteurs*. Le nombre qui résulte de la multiplication des deux facteurs se nomme produit (27).

La multiplication n'est qu'une addition abrégée, et toute multiplication peut être résolue par l'addition (28).

Pour faire l'opération, on pose les deux facteurs l'un au dessous de l'autre, comme pour la soustraction. On met ordinairement le multiplicateur sous le multiplicande; mais si ce dernier était composé d'un moins grand nombre de chiffres, on le placerait en bas pour simplifier l'opération.

On multiplie un nombre par un autre nombre d'un seul chiffre, en multipliant séparément chaque chiffre du multiplicande, en commençant par la droite, et l'on écrit le produit de chacun de ces chiffres à la suite les uns des autres sous le multiplicateur. Si le produit des unités contenait des dizaines, on retiendrait celles-ci pour les ajouter au produit des dizaines, comme on l'a fait pour l'addition. — (10) Il en serait de même si le produit des dizaines contenait des centaines, etc. (29).

Quand le multiplicateur a plusieurs chiffres, on multiplie par les dizaines et par les centaines comme par les unités, en observant de mettre le premier chiffre du produit des dizaines dans la colonne des dizaines, et le premier chiffre du produit des centaines dans la colonne des centaines, etc.; en additionnant tous les produits partiels, on a le produit total (31).

On abrège la multiplication de différentes manières :

1° Quand on a un nombre à multiplier par 10, 100, 1000, 10000, etc., en un mot par l'unité suivie de plusieurs zéros, il suffit d'ajouter un zéro à la droite du multiplicande pour multiplier par 10, deux pour multiplier par 100, trois pour multiplier par 1000, etc. (32).

2° Quand l'un des deux facteurs ou tous les deux sont terminés par des zéros, on peut les supprimer par la pensée, et les ajouter au produit en ne multipliant que les chiffres significatifs, (33), (34). Il faut observer qu'on ne peut ainsi retrancher que les zéros qui sont à droite du premier chiffre significatif, car on ne pourrait employer le même moyen pour ceux qui sont dans l'intérieur du nombre (31).

Questions sur la multiplication.

1° Qu'est-ce que la multiplication? — 2° Qu'est-ce que le multiplicande? — 3° Qu'est-ce que le multiplicateur? — 4° Qu'est-ce que le produit? — 5° Quel nom commun donne-t-on au multiplicande et au multiplicateur? — 6° Comment appelle-t-on les nombres qui n'ont d'autres facteurs qu'eux-mêmes et l'unité? — 7° Qu'est-ce qu'un nombre *multiple?* — 8° Qu'est-ce qu'un nombre *sous-multiple?* — 9° Tout nombre peut-il être sous-multiple? — 10° Quels sont les nombres qui ne peuvent pas être multiples? — 11° Les unités du produit sont-elles de la même espèce que celles du multiplicande ou que celles du multiplicateur? — 12° De combien de manières peut-on faire la multiplication, et quelle est la plus simple? — 13° Comment multiplie-t-on un nombre par 10, 100, 1000? — 14° Comment abrège-t-on la multiplication quand les facteurs sont terminés par des zéros?

Réponses aux questions précédentes.

(*) 1°, 2°, 3° Le multiplicateur est le nombre qui indique combien de fois on répète le multiplicande. — 4°, 5° Facteurs. — 6° Nombres premiers. — 7° C'est un nombre qui en contient un autre un nombre exact de fois. — 8° C'est un nombre qui est contenu exactement dans un autre nombre. — 9° Tout nombre

(*) Les réponses aux questions extrêmement faciles ne sont point indiquées.

peut être sous-multiple d'un autre nombre dont il est facteur. — 10° Ce sont les nombres premiers. — 11° Les unités du produit sont de la même espèce que celles du multiplicande. — 12° De deux manières, par l'addition et par la multiplication proprement dite. — 13° En ajoutant à la droite du multiplicande un, deux, trois, etc., zéros. — 14° On peut supprimer ces zéros par la pensée et les ajouter au produit.

§ V.

DIVISION.

(38) *On a payé* 60 *fr. pour* 6 *aunes d'étoffe; à combien revient l'aune?*

Combien 100 *sous font-ils de francs?*

Il est évident que, dans la première question, une aune coûtera la sixième partie de 60 fr. ou 10 fr.

Dans la seconde, puisqu'il faut 20 sous pour faire 1 franc, autant 20 sera contenu de fois dans 100, autant on aura de francs.

Ces deux opérations, dont l'une consiste à partager un nombre en parties égales, et l'autre à voir combien un nombre est contenu de fois dans un autre, constituent la quatrième opération fondamentale de l'arithmétique, qui est la *division*. Le nombre sur lequel on opère la division est le *dividende;* celui qui indique en combien de parties on partage, ou qui est contenu dans le dividende, s'appelle *diviseur*. Le résultat se nomme *quotient* (*).

(*) *Dividende* vient du participe latin *dividendus*, *devant*

Il est à remarquer que le résultat est le même, si l'on partage, par exemple, 100 en 20 parties égales, ou si l'on voit combien 20 est contenu de fois dans 100; en effet, dans les deux cas on reçoit 5. Quelle que soit la nature de la question, on envisage toujours la division sous ce dernier point de vue, et l'on doit toujours se proposer de chercher combien le diviseur est contenu de fois dans le dividende.

Combien 2200 jours font-ils d'années? Il faut 365 jours pour un an.

Il est certain que l'on aura autant d'années que 365 sera contenu de fois dans 2200. Pour parvenir à ce résultat, le moyen le plus simple qui se présente à nous est de soustraire 365 de 2200 autant de fois que nous le pourrons : $2200-365=1835-365=1470-365=1105-365=740-365=375-365=10$.

365 pouvant être soustrait 6 fois, plus un reste de 10 jours, on voit que 2200 jours font 6 ans et 10 jours.

Mais on conçoit que si les nombres étaient considérables, et surtout le dividende, l'opération serait extrêmement longue, et par-là même sujette à beaucoup d'erreurs. Nous allons indiquer un moyen beaucoup plus prompt d'obtenir le résultat. On voit d'après cela, que la division peut être résolue par la soustraction, et qu'ainsi elle n'est qu'une soustraction

---

être divisé. Diviseur vient de l'infinitif français *diviser*, et *quotient* de l'adverbe *quoties, combien de fois.*

abrégée, comme la multiplication n'est qu'une addition abrégée.

(39) Supposons qu'on ait 42 à diviser par 2 ou à prendre la moitié de 42 ; l'opération se dispose de la manière suivante :

$$42 \mid 2 = 21$$

La petite ligne verticale, comme on l'a dit dans le calcul de tête, signifie *divisé par*, et les deux petites barres parallèles signifient *égale*.

Solution : 2 est contenu dans 4 dizaines 2 dizaines de fois, on pose 2 dizaines au quotient ; 2 est contenu dans 2 unités 1 fois, on pose 1 unité au quotient. Donc 2 est contenu dans 42 21 fois, ou la moitié de 42 est 21.

$$32 \mid 2 = 16$$

Solution : 2 est contenu dans 3 dizaines 1 dizaine de fois et il reste 1 dizaine que l'on ajoute aux unités : 1 dizaine et 2 unités font 12 unités ; 2 est contenu dans 12 unités 6 fois.

58 | 2 = 29	536 | 2 = 268	998 | 2 = 499
94 | 2 = 47	766 | 2 = 383	7834 | 2 = 3917
322 | 2 = 161	458 | 2 = 229	9982 | 2 = 4991

Observation. Il est nécessaire, dans le commencement, de toujours faire spécifier par l'élève la valeur des chiffres du quotient à mesure qu'il les pose, de même que celle du dividende partiel. Ainsi dans cette question : 668 | 2 = 334, il dira :

2 est contenu dans 6 centaines 3 centaines de fois, je pose 3 centaines au quotient. 2 est contenu dans 6 dizaines

3 dizaines de fois, je pose 3 dizaines au quotient, etc., etc. Quoique cette observation paraisse au premier abord de peu d'importance, je la regarde comme essentielle pour l'intelligence parfaite de l'opération et pour éviter le mécanisme. Il est aussi très-utile de faire déterminer d'avance le nombre des chiffres que le quotient doit renfermer.

Pour fixer l'attention des enfants et tenir leur esprit en haleine, il est bon de les faire tous participer de temps en temps à la même explication, soit que le maître propose lui-même les questions, soit qu'ils se les proposent réciproquement. Voici la formule à suivre : il s'agit de diviser 5566 par 2.

1° Qu'allez-vous faire (*)?

R. Diviser 5566 par 2, ou prendre la moitié de 5566, ou voir combien 2 y est contenu de fois.

2° Combien 2 est-il contenu de fois dans 5 mille?

R. 2 mille fois, et il reste 1 mille. On pose 2 mille au quotient.

3° Que fait-on du mille qui reste?

R. On l'ajoute aux centaines. 1 mille et 5 centaines font 15 centaines.

4° Combien 2 est-il contenu de fois dans 15 centaines?

R. 7 centaines de fois, et il reste 1 centaine. On pose 7 centaines au quotient.

5° Que fait-on de cette centaine qui reste?

R. On l'ajoute aux dizaines. 1 centaine et 6 dizaines font 16 dizaines.

(*) L'expérience m'a démontré qu'un grand nombre d'enfants résolvent toutes les questions qu'on leur propose sans savoir où ils en veulent venir. C'est pourquoi je regarde comme nécessaire de leur faire énoncer le but qu'ils se proposent pour toutes sortes de questions.

(40) Il faut, par diverses questions, amener l'élève à trouver lui-même la manière de faire la preuve de la division. Voici comment l'instituteur devra s'y prendre :

— Combien 2 est-il contenu de fois dans 348? *R.* 174 fois.

— Quel nombre recevra-t-on si l'on répète 2 fois 174?

R. On recevra 348.

— Mais si au lieu de recevoir exactement 348 vous receviez plus ou moins, qu'en concluriez-vous?

R. Que l'opération est fausse?

— Quel est donc le moyen de s'assurer de l'exactitude de la division?

R. Il faut multiplier le quotient par le diviseur, et l'on doit recevoir le quotient.

Nous donnerons plus de développements à la preuve à la fin de cette opération.

(41) $3835 \mid 2 = 1917 \frac{1}{2}$.

Solution. Après avoir trouvé combien 2 est contenu de fois dans les mille, dans les centaines et dans les dizaines, on trouve 15 pour le nombre d'unités à diviser; 2 est contenu 7 fois dans 15 et il reste 1 unité, qu'il faut aussi partager en 2 parties égales. La moitié d'une unité est $\frac{1}{2}$. (Voyez dans le calcul de tête, vol. I, page 136, la manière d'écrire les fractions.)

$5300 \mid 2 = 2650$.

Solution. 2 est contenu 2 mille fois dans 5 mille, et il reste 1 mille; 1 mille et 3 centaines font 13 centaines; 2 est contenu 6 centaines de fois dans 13 centaines, et il reste 1 centaine; 1 centaine vaut 10 dizaines; 2 est contenu 5 dizaines de fois dans 10 dizaines; comme il n'y a point d'unités, on remplace les unités du quotient par un zéro.

$$123 \mid 2 = 61 \tfrac{1}{2}.$$

Solution. 2 n'est pas contenu *une centaine de fois* dans une centaine; on ajoute cette centaine aux dizaines, ce qui fait 12 dizaines; 2 est contenu dans 12 dizaines 6 dizaines de fois, et dans 3 unités il est contenu 1 fois, etc. On voit, d'après cela, que lorsque le diviseur n'est pas contenu dans le premier chiffre du dividende on prend les deux premiers. Nous verrons plus tard que lorsque le diviseur est composé de plusieurs chiffres, et qu'il n'est pas contenu dans les deux premiers chiffres du dividende, on en prend autant qu'il en faut pour qu'il y soit contenu.

$$3012 \mid 2 = 1506.$$

Solution. 2 est contenu mille fois dans 3 mille, et il reste 1 mille qui vaut 10 centaines; 2 est contenu 5 centaines de fois dans 10 centaines. Il n'est pas contenu 1 dizaine de fois dans 1 dizaine; c'est pourquoi on réunit cette dizaine aux unités, ce qui en fait 12; 2 est contenu 6 fois dans 12; mais il faut avoir soin de remplacer les dizaines du quotient par un zéro.

4102 | 2 = 2051	2701 | 2 = 1350 $\frac{1}{2}$
7101 | 2 = 3550 $\frac{1}{2}$	1301 | 2 = 650 $\frac{1}{2}$
1336 | 2 = 668	1225 | 2 = 612 $\frac{1}{2}$
7795 | 3 = 2598 $\frac{1}{3}$	380 | 2 = 190
712 | 3 = 237 $\frac{1}{3}$	400 | 3 = 133 $\frac{1}{3}$

335 | 3 = 111 $\frac{2}{3}$.

Dans ce dernier exemple, on trouve que 3 est contenu dans 335 111 fois et qu'il reste 2 unités qu'il faut aussi partager en 3 parties égales; le tiers de 2 unités est $\frac{2}{3}$. Les élèves qui ont suivi le cours de calcul de tête sont en état de comprendre cette transformation du reste d'une division en une fraction. Quant à ceux qui ne l'ont pas suivi, ils peuvent, pour le moment, se contenter d'énoncer le reste sans le transformer en fraction. Nous écrirons toujours ce reste à la droite du quotient, précédé d'un *r*, qui signifie *il reste*.

540 | 4 = 135	3525 | 5 = 705
3674 | 4 = 918 r. 2	7008 | 5 = 1401 r. 3
23107 | 4 = 5778 r. 3	31000 | 5 = 6200
38929 | 6 = x	71390 | 7 = x
75000 | 8 = x	37134 | 9 = x.

Lorsque l'on veut faire la preuve d'une division qui a un reste, il faut ajouter ce reste au produit du quotient par le diviseur, et l'on doit trouver le dividende (IX).

Division par un nombre de plusieurs chiffres.

(42) *Un pied vaut 12 pouces; combien 525 pouces font-ils de pieds?*

$$525 \mid 12 = 43$$

Solution. Le diviseur 12 n'étant pas contenu dans le premier chiffre du dividende, il faut prendre les deux premiers; 12 est contenu dans 52 dizaines 4 dizaines de fois pour 48, et il reste 4 dizaines que j'ajoute aux unités, ce qui en fait 45; 12 est contenu dans 45 3 fois pour 36, et il reste 9 unités; 525 pouces font donc 43 pieds 9 pouces.

Lorsque le diviseur est composé de plusieurs chiffres, l'opération devient plus difficile à faire comme nous l'avons faite jusqu'à présent; voici la disposition qu'on lui donne :

$$\begin{array}{l}
4525 \mid 34 = 133 \\
\underline{34} \\
112 \\
\underline{102} \\
105 \\
\underline{102} \\
3
\end{array}$$

Solution. 34 est contenu 1 centaine de fois dans 45, 34 de 45 il reste 11 centaines que l'on écrit sous 34 comme reste de soustraction. Ces 11 centaines doivent être ajoutées aux 2 dizaines; à cet effet on écrit ces 2 dizaines à côté des 11 centaines, ce qui fait 112 dizaines; 34 est contenu dans 112 3 fois, 3 fois 34 font 102; on soustrait 102 de 112 et il reste 10 dizaines que l'on ajoute aux unités en abaissant le chiffre qui les exprime, ce qui donne 105; 34 est contenu 3 fois dans 105, 3 fois 34 font 102, 102 de 105 il reste 3; donc 34 est contenu dans 4525 133 fois et il reste 3.

Observation. Avant d'indiquer à l'élève les moyens d'abréger la division en soustrayant de suite chaque produit partiel de chaque dividende partiel sans l'écrire, il est nécessaire qu'il fasse avec facilité l'opération telle que nous venons de l'indiquer, et qu'il la raisonne avec précision. Rappelons-nous ce principe : qu'il ne faut jamais présenter à l'élève deux difficultés à la fois, autrement son attention se trouve partagée et par conséquent moins forte sur chacune.

2480 | 15 = 3629 | 18 =
2454 | 21 = 6728 | 28 =
5800 | 27 = 7012 | 31 =
34412 | 33 = 48700 | 39 =

(43) 25612 | 37 = 692

```
25612 | 37 = 692
222
----
 341
 333
 ----
   82
   74
   --
    8
```

Le diviseur 37 n'étant pas contenu dans les deux premiers chiffres du dividende, on en prend trois. Mais pour voir combien 37 est contenu de fois dans le dividende partiel, il faudra faire beaucoup d'essais inutiles et d'autant plus nombreux, que les nombres sur lesquels il faut opérer sont plus forts. Voici le moyen d'éviter cet inconvénient.

On voit à peu près combien le diviseur est contenu de fois dans le dividende partiel, en cherchant combien de fois le premier ou les deux premiers chiffres du diviseur sont contenus de fois dans le premier ou les deux premiers chiffres du dividende partiel. Ainsi, dans l'exemple précédent, 3 étant contenu 8 fois dans 25, première partie du dividende partiel 256, on en conclut que 37 est contenu environ 8 fois dans 256. Mais en multipliant 37 par 8, on obtient 296, nombre qui ne peut pas être soustrait de 256. Ce moyen, comme on le voit, ne fait pas connaître exactement le quotient; mais on sait qu'il ne peut pas être plus grand que le nombre indiqué, et qu'il est ordinairement plus petit. Ayant donc trouvé que le premier chiffre du quotient doit être moins que 8, on essaie 7 et 6.

Ayant trouvé que 37 est contenu 6 fois dans 256, et qu'il reste 34 centaines, on réduit ces 34 centaines en dizaines, en abaissant le chiffre suivant, ce qui fait 341 dizaines. On cherchera, par le même moyen, combien 37 est contenu de fois dans ce nombre; mais il peut y avoir un sujet d'erreur, car en cherchant combien le premier chiffre du diviseur est contenu de fois dans le premier du dividende partiel 341, on trouvera qu'il n'y est contenu qu'une fois, et il est évident que 34 est contenu plus d'une fois dans 341. Voici le moyen d'éviter cette erreur. Il faut considérer le diviseur partiel 341 comme exprimant des unités, bien qu'il exprime réellement des dizaines, et voir alors combien les 3 dizaines du diviseur sont contenues de fois dans les 34 dizaines du dividende. Si le diviseur contenait des centaines, il faudrait voir combien celles-ci sont contenues de fois dans les centaines du dividende; en un mot, il faut voir combien les unités d'un certain ordre du diviseur sont contenues de fois dans les unités *du même ordre* du dividende.

Dans le cas précédent, on trouve que 3 est contenu 11 fois dans 34; mais remarquez que le plus fort chiffre que l'on puisse écrire dans chaque colonne est 9. Ainsi, bien que ce moyen indique quelquefois pour quotient partiel un nombre plus fort que 9, il ne faut jamais mettre plus. On essaie donc 9; on trouve que 9 fois 37 font 333, qui retranché de 341 donne 8 dizaines pour reste. On réduit ces 8 dizaines en unités, en abaissant le chiffre suivant, ce qui en fait 82; 37 y est contenu 2 fois, 2 fois 37 font 74, 74 de 82 il reste 8; donc 37 est contenu 692 fois dans 25,612, et il reste 8.

```
(44)        6000 | 29 = 206
            58
            ----
             200
             174
            ----
              26
```

Dans cet exemple, après avoir trouvé que 29 est contenu dans 60 centaines 2 centaines de fois, on trouve qu'il reste 2 centaines que l'on réduit en dizaines en abaissant le chiffre suivant, ce qui donne 20 dizaines. Mais 29 n'étant pas contenu dans 20 dizaines, on remplace les dizaines du quotient par un zéro, et l'on réduit les 20 dizaines en unités, en abaissant le chiffre suivant, ce qui donne 200; 29 est contenu 6 fois dans 200 et il reste 26. Toutes les fois que le diviseur n'est pas contenu dans un dividende partiel, il faut placer un zéro au quotient, afin de conserver aux autres chiffres leur véritable valeur. En effet le premier chiffre du quotient, dans l'exemple précédent, exprime des centaines, et le dernier exprime des unités, il faut donc remplacer les dizaines par quelque chose, sans quoi on s'exposerait à des erreurs considérables.

Exemples sur lesquels on s'exercera.

3822 | 88 =	84522 | 57 =
7300 | 37 =	56000 | 57 =
26556 | 98 =	560329 | 72 =
4400 | 44 =	5440 | 17 =
64056 | 21 =	6420 | 32 =
29356 | 223 =	34562 | 168 =
623582 | 365 =	343678 | 2121 =

Différents moyens d'abréger la division. — Division par 10, 100, 1000, 10000, etc.

(45) *Observation.* Avant d'indiquer à l'élève le moyen abrégé de diviser par les nombres décimaux, il est nécessaire qu'il cherche quelques questions par le procédé qui lui est connu.

3454 | 10=345 r.	4	54588 | 10=5458 r.	8
5729 | 10=572 r.	9	88977 | 10=8897 r.	7
5729 | 100= 57 r.	29	34568 | 1000= 34 r.	568.

Quoique la division par 10, 100, etc., s'effectue plus facilement que par d'autres nombres, il est un moyen infiniment plus prompt de diviser par ces sortes de nombres.

Supposons qu'on veuille diviser 3520 par 10.

Remarquez le changement qui s'opère dans ce nombre par la suppression du zéro; le 2 qui valait 20 ne vaut plus que 2 unités, le 5 qui valait 500 ne vaut plus que 50, et le 3 qui valait 3000 ne vaut plus que 300. Chacun de ces chiffres a une valeur dix fois plus petite qu'auparavant, par conséquent tout le nombre est donc aussi devenu dix fois plus petit, ou a été divisé par 10.

La même observation sera répétée sur les nombres suivants :

320, 631, 728, 344.

Quoique 631, 728 et 344 ne soient pas terminés par un zéro, on peut remarquer qu'en retranchant le dernier chiffre à droite, ils ont, comme précédemment, une valeur dix fois plus petite.

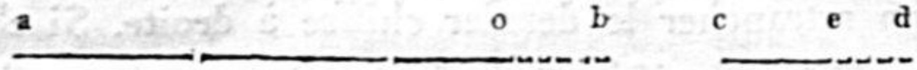
De ces différentes observations on conclut que, pour diviser un nombre quelconque par 10, il suffit d'en retrancher le dernier chiffre à droite. Si c'est un chiffre significatif, il forme le reste de la division.

De même, si l'on a un nombre à diviser par 100, 1000 ou 10000, etc., il suffit de retrancher de la droite du dividende 2, 3 ou 4 chiffres. En effet, en en retranchant 2, le chiffre qui était dans la colonne des centaines se trouve dans celle des unités, et chacun des autres chiffres est aussi descendu de deux rangs sur la droite; leur valeur est donc devenu cent fois plus petite, et le nombre a été divisé par 100. On explique de la même manière qu'on divise par 1000 en retranchant trois chiffres, par 10000 en en retranchant quatre, etc.

(46) $340 \mid 20 = 17 \quad 34. \mid 2. = 17$
$2100 \mid 70 = 30 \quad 210. \mid 7. = 30$
$640 \mid 80 = 8 \quad 64. \mid 8. = 8$

On peut remarquer que dans ces exemples le résultat est le même, après avoir retranché un zéro du dividende et du diviseur; la raison en est facile à saisir (il serait bon que l'élève pût la trouver lui-même), car il est clair que 20 unités ne sont pas contenues dans 340 unités un plus grand ou un plus petit nombre de fois que 2 dizaines dans 34 dizaines, puisqu'en retranchant un zéro de part et d'autre, on a diminué les deux nombres de la même quantité.

Ceci peut être rendu sensible de la manière suivante :



La ligne *c d* est contenue 3 fois dans la ligne *a b*, et il est évident que si de la ligne *c d* on retranche une certaine portion *e d*, et que de la ligne *a b* on retranche une certaine portion *o b* égale à *e d*, la ligne *c e* sera de même contenue 3 fois dans *a o*. Le cas précédent est absolument semblable à celui-ci.

On peut donc, pour simplifier une opération, retrancher autant de zéros du diviseur que du dividende, et le quotient sera toujours exact.

90000 | 15000 revient à diviser 90 | 15

(47) Si le diviseur seul est terminé par des zéros, on peut retrancher du dividende autant de chiffres significatifs qu'on retranche de zéros du diviseur; on joint ensuite ces chiffres au reste.

263 | 130 = revient à diviser 26.3 | 13. =

En effet le résultat est le même.

357 | 120 = 2	35.7 | 12. = 2
240	11.7
117	

On trouve que 357 contient 2 fois 120, et qu'il reste 117; en réduisant l'opération à 35.7 | 12, on trouve de même 2 pour quotient et 11 pour reste. J'ai dit plus haut qu'il fallait joindre à ce reste le chiffre qu'on avait retranché, ce qui fait 117. Mais observez bien qu'il ne faut plus diviser ce nombre 117 par 12; car en joignant le chiffre 7 au reste 11, on rétablit le dividende dans son état primitif, il faut aussi rétablir le diviseur; or, 117 étant moindre que 120, il ne peut plus le contenir.

Si le dividende seul était terminé par des zéros, il faudrait faire la division comme à l'ordinaire, car pour les retrancher, il faudrait aussi retrancher des chiffres significatifs du diviseur, ce qui ne pourrait pas se faire.

(48) On pourrait encore abréger la division de la manière suivante : nous avons vu qu'en supprimant un nombre égal de zéros du dividende et du diviseur, le quotient ne changeait pas. Or, si l'on divisait par un même nombre le dividende et le diviseur, le quotient serait de même toujours exact. On peut pour cela s'aider des principes suivants :

Tout nombre terminé à droite par un chiffre pair est aussi pair et peut être divisé par 2.

Tout nombre dont la somme des chiffres ajoutés ensemble comme des unités simples est un nombre divisible par 3 ou par 9, est également divisible par 3 ou par 9.

Tout nombre terminé par un 5 ou un zéro est divisible par 5.

Ainsi dans cette question : 31104 | 1036, le dividende et le diviseur étant des nombres pairs peuvent être divisés par 2, ce qui réduit l'opération à 15552 | 513. Ces deux derniers nombres peuvent être divisés encore par 3, puisque la somme des chiffres du premier est 18 et celle des chiffres du second 9, nombres divisibles par 3, ce qui réduit l'opération à 5184 | 171 ; ces deux nombres pouvant être encore divisés par 3, on a 1728 | 57.

	N° 1.	N° 2.
(49)	3627 | 121 = 29	3627 | 121 = 29
	242	1207
	1207	118
	1089	
	118	

Lorsque nous avons fait une division, nous avons posé jusqu'à présent le produit du diviseur par chaque chiffre du quotient sous chaque dividende partiel, et nous avons fait une soustraction. On peut abréger l'opération en se dispensant d'écrire les différents produits sous chaque dividende partiel en soustrayant de suite. Ainsi dans l'exemple ci-dessus, au lieu d'écrire 242 sous 362, on pouvait dire : n° 2, 2 fois 1 font 2, 2 de 2 il reste zéro ; 2 fois 2 font 4, 4 de 6 il reste 2 ; 2 fois 1 font 2, 2 de 3 il reste 1, en tout 120. On descend à côté le chiffre 7 ; ayant trouvé que 121 est contenu 9 fois dans 1207, on opère de la manière suivante : 9 fois 1 font 9 ; 9 ne pouvant être soustrait de 7, on suppose une dizaine sur le 7, ce qui fait 17, 9 de 17 il reste 8 : $9 \times 2 = 18$. Mais ayant supposé une dizaine au nombre dont on soustrait, il faut en supposer une au nombre que l'on soustrait. Ainsi : $18 + 1 = 19$, 19 de 0 cela ne se peut pas. Remarquez ici que pour soustraire 19 dizaines de 0, il faut ajouter 2 centaines sur ce zéro, car une seule ne suffirait pas; 19 dizaines de 20 dizaines il reste 1 dizaine. 9 fois une centaine font 9 centaines; mais comme l'on a ajouté 2 centaines au nombre dont on a soustrait, il faut aussi en ajouter 2 au nombre que l'on soustrait; ainsi 9 centaines et 2 centaines font 11 centaines, 11 centaines de 12 centaines il reste 1 centaine; ce procédé est basé sur la méthode de soustraction que nous avons expliquée au n° 17. Du reste, ce n'est que par l'habitude et beaucoup d'exercices que l'on parviendra à opérer facilement de cette manière.

Autre exemple :

N° 1.	N° 2.
251710 | 239 = 1053	251710 | 239 = 1053
239	1271
1271	760
1195	43
760	
717	
43	

Solution. N° 2. 239 est contenu 1 fois dans 251; 1 fois 9 font 9, 9 de 1 cela ne se peut pas, on suppose donc une dizaine sur le 1 ce qui fait 11, 9 de 11 il reste 2; 1 fois 3 font 3; mais ayant supposé une dizaine au nombre supérieur, il faut en supposer une au nombre inférieur : $3+1=4$, 4 de 5, il reste 1; 2 fois 1 font 2, 2 de 2, il ne reste rien.

A côté de ce reste 12, j'abaisse le chiffre suivant, ce qui fait 127; mais 239 n'étant pas contenu dans ce nombre, je place un zéro au quotient, et je descends le chiffre suivant, ce qui donne 1271; 239 est contenu 5 fois dans ce nombre; 5 fois 9 font 45, 45 de 1 cela ne se peut pas; on suppose donc sur le 1 autant de dizaines que cela est nécessaire pour pouvoir soustraire 45. Il en faut au moins 5; 5 dizaines et 1 unité font 51, 45 de 51 il reste 6; 5 fois 3 font 15; mais ayant supposé 5 dizaines au nombre supérieur, il faut en supposer aussi 5 au nombre inférieur, 15 et 5 font 20, 20 de 7 cela ne se peut pas; on suppose 2 centaines sur le 7, ce qui donne 27, 20 de 27 il reste 7; 5 fois 2 font 10, plus 2 centaines que j'ai ajoutées au nombre supérieur font 12, 12 de 12, il ne reste rien. Je descends ensuite le chiffre suivant, ce qui fait 760 unités. 239 y est contenu 3 fois; 3 fois 9 font 27, 27 de 0 cela ne se peut pas; on suppose 3 dizaines sur le 0, ce qui fait 30 unités, 27 de 30 il reste 3; 3 fois 3 font 9, plus 3 dizaines que j'avais supposées au nombre supérieur font 12, 12 de 6 cela ne se peut pas; je dis 12 de 16 il reste 4; 3 fois 2 font 6, plus 1 centaine que j'ai supposée sur le 6 font 7, 7 de 7 il ne reste rien.

Propriété de la division.

(50) Soit 144 à diviser par 16, on aura 9 pour quotient. Il est certain que si l'on double ou triple

le dividende, le quotient sera aussi doublé ou triplé. Si au contraire on prend la moitié ou le tiers, etc. du dividende, le quotient sera réduit à la moitié ou au tiers.

Si au contraire on divise par la moitié ou le tiers de 16, on aura un quotient 2 ou 3 fois aussi grand que 9.

Si on divise par le double ou le triple de 16, on aura un quotient 2 ou 3 fois plus petit que 9.

Enfin si l'on multiplie ou si l'on divise le dividende et le diviseur par le même nombre, le quotient ne variera pas (nos 47 et 48).

Preuves de la multiplication et de la division.

(51) Si l'on multiplie 12 par 5, on reçoit 60; 12, l'un des deux facteurs, est donc contenu 5 fois dans le produit, et 5, l'autre facteur, est contenu 12 fois dans le même produit.

On voit par-là que le multiplicande est contenu dans le produit autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, et que le multiplicateur est contenu dans le produit autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicande. *Donc, en divisant le produit d'une multiplication par l'un des deux facteurs, on doit recevoir l'autre facteur, si l'opération est exacte.*

(52) Nous avons vu, au commencement de la division, que puisque le diviseur est contenu dans le dividende autant de fois qu'il y a d'unités au quotient, en multipliant ce dernier par le diviseur, on doit recevoir le dividende si l'opération est exacte.

Telles sont les preuves de la multiplication et de la division; mais on voit que ces preuves elles-mêmes sont des opérations aussi longues que les opérations principales, et toutes aussi sujettes aux erreurs. Il est donc nécessaire d'avoir des moyens plus expéditifs et plus sûrs.

Preuve par 9.

(53) Si l'on divise par 9 un nombre exprimé par un seul chiffre suivi d'un nombre quelconque de zéros, le reste sera toujours égal à ce même chiffre; par exemple : après avoir divisé 6000 par 9 on trouve pour reste 6; 800 divisé par 9 donne pour reste 8; 50000 divisé par 9 donne pour reste 5, etc. D'après cela il est facile de concevoir que si l'on divise par 9 un nombre quelconque, par exemple 7829, le reste sera le même que si l'on divise par 9 la somme des chiffres qui le composent ajoutés ensemble comme des unités simples; car 7829 n'est autre chose que $7000 + 800 + 20 + 9$. En effet, en divisant ce nombre par 9, on trouve pour reste 8. La somme des chiffres $7, 8, 2, 9 = 26$. Si l'on en retranche tous les 9 il restera de même 8.

C'est sur ces deux faits qu'est basée la preuve par 9.

3679	25 reste	× 7
5268	21 reste	3
29432		21 reste 3.
22074		
7358		
18395		
19380972	39 reste 3,	

Soit à multiplier 3679 par 5268, on trouve pour produit 19380972. La somme des chiffres du multiplicande est 25, et après en avoir retranché les 9 il reste 7. Après avoir fait la même opération sur les chiffres du multiplicateur il reste 3. Ces deux restes multipliés l'un par l'autre donnent 21, et en divisant ce produit 21 par 9, on trouve 3 pour reste. Si l'opération est exacte, on doit trouver de même 3 pour reste en retranchant tous les 9 de la somme des chiffres du produit.

Pour simplifier cette opération, il n'est pas toujours nécessaire d'ajouter tous les chiffres qui composent un nombre. Par exemple, si l'on veut retrancher tous les 9 du produit 19380972, on voit qu'il y a deux 9 que l'on peut retrancher. 7 et 2, dont la somme est 9, peuvent aussi être retranchés de même que 1 et 8, dont la somme est également 9. Il ne reste donc plus que 3.

L'usage apprendra d'ailleurs les moyens d'abréger cette opération.

Voici plusieurs cas qui pourraient embarrasser l'élève.

$$1^{\circ}\ 35 \times 24 = 840.$$

Dans cet exemple, la somme des chiffres des facteurs est moindre que 9 ; cette somme est alors considérée comme reste, et l'opération est la même que dans le cas précédent. En effet, $3 + 5 = 8$; $2 + 4 = 6$; $6 \times 8 = 48$. Si du produit 48 on retranche tous les 9, il restera 3. Le reste que donne la suppression des 9 dans le produit 840 est aussi 3.

$$2^{o}\ 36 \times 47 = 1692.$$

Dans cet exemple, le multiplicande donne pour reste o, et le multiplicateur 2. Or, $2 \times 0 = 0$; le reste du produit des restes étant nul, il doit être également nul dans le produit total 1692. C'est ce qui a lieu en effet.

3° Si les deux facteurs sont divisibles par 9, le produit doit l'être également.

(54) La preuve de la division se fait de la manière suivante.

Nous avons vu que dans toute division, le produit du quotient par le diviseur était égal au dividende (40). D'après cela, lorsque l'on veut vérifier l'exactitude d'une division au moyen de la preuve par 9, il faut considérer le diviseur et le quotient comme facteurs, et le dividende comme produit, et l'opération se réduit à la preuve de la multiplication. Le cas qui pourrait embarrasser l'élève est celui où la division ne s'effectuerait pas exactement, comme celle-ci : 357 | 29 = 12 ; mais remarquez que puisque 29 est
9
contenu dans 357 12 fois, et qu'il reste 9, 12 fois 29 ne doivent pas faire exactement 357, mais 357 — 9. Il faut donc avoir soin de retrancher le reste du dividende, et le nombre qui en résultera sera exactement le produit du diviseur par le quotient.

Applications de la division.

(55) 1° Combien 2829 pieds font-ils de perches?

2° Combien 267811 toises font-elles de lieues? (1 lieue = 2282 toises.)

3° Combien 5200 lignes font-elles de toises?

4° Combien 216237 grains font-ils de livres? (1 livre = 9216 grains.)

5° Combien 5783213 grains font-ils de quintaux?

6° Combien 376810 sous font-ils de francs?

7° Combien 36781 centimes font-ils de francs?

8° Combien 256712 secondes font-elles de jours?

9° Une personne a dépensé dans un an 7836 fr.; combien cela fait-il par jour l'un portant l'autre?

10° Une personne laisse en mourant une fortune de 120000 fr. Le tiers de cette fortune doit être partagé entre ses deux frères, et les deux autres tiers entre ses cinq enfans; quelle est la part de chacun?

11° Cinquante tonneaux de vin ont été vendus 27000 fr.; à combien revient la bouteille si chaque tonneau en contient 180?

12° Un marchand de vin a dans sa cave un certain nombre de tonneaux qu'il a vendus 16800 fr. à raison de 236 fr. la pièce; on demande le nombre des tonneaux?

13° Une garnison consomme en un mois 30,000 livres de pain. La ration de chaque homme est de 2 livres par jour; on demande de combien d'hommes la garnison se compose?

14° Un ouvrage in-8° contient 1280 pages; combien contient-il de feuilles d'impression? (1 feuille in-8° = 16 pages.)

15° La terre parcourt en 1 an autour du soleil

20614880 millions de lieues; combien en parcourt-elle par minute?

16° 678100 | 329 =	17° 391201 | 540 =
18° 2359000 | 500 =	19° 47328 | 6234 =
20° 713002 | 409 =	21° 573021 | 8404 =

Combinaison de la division avec les opérations précédentes.

22° Un marchand a acheté 3 pièces de toile pour 1210 fr. : la première contenait 30 mètres, la seconde 39, et la troisième 52; combien a-t-on payé le mètre?

23° Un marchand a acheté 68 aunes de drap pour 2720 fr., il les revend 3128 fr.; on demande à combien lui revient l'aune, et combien il a gagné sur chacune?

24° Un négociant a payé pour 2 pièces de drap 1968 fr.; on demande combien elles contenaient d'aunes en tout, sachant qu'il en a vendu 18 pour 540 fr. et qu'il a gagné 6 fr. par aune?

25° 52 ouvriers ont fait en 34 jours 544 toises d'ouvrage. 36 autres ouvriers ont fait en 28 jours 504 toises, et 21 autres ouvriers ont fait en 62 jours 1302 toises; combien a-t-il été fait de toises par jour en tout?

26° Un homme veut employer 6 ouvriers à un ouvrage de 864 toises. Les 6 ouvriers lui demandent chacun 3 fr. par jour, et feront chacun 4 toises. Il s'adresse à 6 autres qui lui demandent 5 fr. par jour, mais qui feront chacun 6 toises; lesquels doit-il employer pour payer le moins cher possible?

27° On a employé 34 ouvriers pour faire 204 toises d'ouvrage; combien faudrait-il d'ouvriers pour faire 504 toises du même ouvrage et dans le même tems?

28° On a employé 32 ouvriers pour faire 160 toises d'ouvrage; combien faudrait-il d'ouvriers pour faire 720 toises en la moitié moins de tems?

29° Un homme a une fortune qui lui permet de dépenser 12 fr. par jour; mais il doit payer à la fin de l'année une somme de 1460 fr.; quel est son revenu, et à combien doit-il restreindre sa dépense journalière pour mettre cette somme de côté?

30° 72 ouvriers ont fait ensemble 48 toises; quel est l'ouvrage de chacun?

31° 432 ouvriers ont fait ensemble 30 toises; quel est l'ouvrage de chacun?

Réponses aux questions précédentes.

1° 157 perches 3 pieds. — 2° 117 lieues 827 toises. — 3° 6 toises 3 pouces. — 4° 23 livres 4269 grains. — 5° 6 quintaux 27 livres 4781 grains. — 6° 18840 fr. 10 sous. — 7° 367 fr. 81 cent. — 8° 71 heures 18 minutes 32 secondes. — 9° 7836 fr | 365 = 21 fr., et il reste 171 fr. que l'on réduit en centimes en multipliant par 100, ce qui donne 17100 cent., que l'on divise par 365. Le résultat est 46 cent.; il reste 310 cent. Donc cette personne a dépensé par jour 21 fr. 46 cent. — 10° Chacun des frères aura 20000 fr., et chacun des enfants 16000 fr. — 11° Le tonneau revient à 540 fr. et la bouteille à 3 fr. — 12° 50 tonneaux. — 13° 500 hommes. — 14° 80 feuilles. — 15° 9412 l. — 16° 2061 rest. 31. — 17° 724 rest. 241. — 18° 4718. — 19° 7 rest. 3690. — 20° 1743 rest. 115. — 21° 6 rest. 6888. — 22° 10 fr. — 23° 2720 | 68 = 40. 3128 — 2720 = 408. 408 | 68 = 6. Donc l'aune coûte 40 fr., et le marchand la vend 46. — 24° 540 | 18 = 30. Le marchand vend donc l'aune 30 fr., mais s'il gagne 6 fr. par aune, elle ne lui coûte que 24 fr. En divisant 1968 par 24, on aura le nombre d'aunes contenues dans les deux pièces. 1968 | 24 = 82. — 25° 544 | 34 = 16 ; 504 | 28 = 18 ; 1302 | 62 = 21 ; 16 + 18 + 21 = 55 toises. — 26° Si les 6 premiers ouvriers font chacun 4 toises par jour, ils feront ensemble 6 × 4 ou 24 toises par jour ; et pour voir en combien de jours ils auront fini l'ouvrage, il faut diviser 864 par 24 : on trouve 36 jours. Si on les paie à raison de 3 fr. par jour pour chacun, on aura 6 × 3 ou 18 fr. par jour, et pour 36 jours on paiera 18 × 36 ou 648 fr. Les 6 autres ouvriers faisant chacun 6 toises par jour en feront ensemble 36, et en divisant 864 par 36 on trouve qu'ils achèveront l'ouvrage en 24 jours. Ils coûtent ensemble 6 × 5 fr. ou 30 fr. par jour ; et en 24 j. ils coûteront 24 fois 36 ou 864 fr. Donc il est plus avantageux de prendre les 6 premiers. — 27° Si 34 ouvriers ont fait 204 toises, chaque ouvrier en a fait la trente-quatrième partie de 204 ou 6. 504 toises | 6 = 84. Donc il faudrait 84 ouvriers pour faire 504 toises. —

28° 160 | 32 = 5. 720 | 5 = 144. Il faudrait donc 144 ouvriers pour faire 720 toises en travaillant autant que les premiers; mais s'ils travaillent la moitié moins (en supposant le tems déterminé), il faudra le double d'ouvriers, par conséquent 144 × 2 ou 288 ouvr. — 29° 365 × 12 = 4380 fr. de revenu. 4380 — 1460 = 2920; 2920 | 365 = 8. Il lui reste donc 8 fr. à dépenser par jour. — 30° 48 toises ne pouvant être divisées par 72, on les réduit en pieds, ce qui donne 288 pieds. Chaque ouvrier fait la soixante-douzième partie de ce nombre ou 4 pieds. — 31° 30 toises ne pouvant être divisées par 432, on les réduit en pouces, parce que le nombre des pieds ne peut pas être non plus divisé par le nombre d'ouvriers. 30 × 6 = 180 × 12 = 2160 | 432 = 5 pouces.

Théorie de la division.

(56) Comme la multiplication est une addition abrégée, de même la division est une soustraction abrégée, en sorte que toutes les combinaisons que peuvent subir les nombres se réduisent à ces deux principales : *ajouter* et *soustraire* (38).

La division peut être envisagée sous deux points de vue, c'est-à-dire qu'on peut avoir pour but de partager un nombre en parties égales ou de voir combien un nombre est contenu de fois dans un autre. Quelle que soit l'intention que l'on ait, on fait l'opération comme si elle tendait à ce dernier but, le résultat étant le même (38).

Le nombre que l'on divise se nomme *dividende*, celui qui divise se nomme *diviseur*, et celui qui indique combien le diviseur est contenu de fois dans le dividende se nomme *quotient* (38).

L'opération se fait en cherchant combien le diviseur est contenu de fois dans le premier chiffre à gauche du dividende. Si un chiffre ne suffit pas, on en prend deux, trois, quatre, cinq, etc., autant que cela est nécessaire. Ayant trouvé combien le quotient est contenu de fois dans le premier dividende partiel, on en cherche le surplus, que l'on trouve en soustrayant du dividende partiel le produit du diviseur par le chiffre du quotient que l'on vient de poser. On descend ensuite à côté du reste le chiffre suivant du dividende, et l'on cherche encore combien ce nouveau dividende partiel contient de fois le diviseur, ainsi de suite.

Si le dividende n'est pas contenu dans le dividende partiel après avoir descendu le chiffre, on met un zéro au quotient (39 à 45).

On abrège la division de plusieurs manières.

1° Lorsque le dividende et le diviseur sont terminés par des zéros, on peut en retrancher un nombre égal de part et d'autre, et le résultat est toujours exact. Si le diviseur seul était terminé par des zéros, on peut les retrancher en retranchant en même temps autant de chiffres sur la droite du dividende. Ces chiffres sont joints au reste à la fin de l'opération (46). 2° Pour diviser par 10, 100, 1000, etc., il suffit de retrancher un, deux ou trois chiffres, etc., de la droite du dividende (45). 3° Au lieu de placer sous chaque dividende partiel le produit du diviseur par chaque chiffre du quotient, on peut soustraire chaque chiffre de ce produit à mesure qu'on les trouve (49).

Si l'on divise ou si l'on multiplie le dividende et le diviseur par un même nombre, le quotient ne change pas de valeur.

Si l'on divise par la moitié ou le tiers du diviseur, le quotient sera doublé ou triplé. Le contraire a lieu si l'on divise par le double ou le triple du diviseur (50).

La preuve de la multiplication se fait en divisant le produit par l'un des deux facteurs. Pour que l'opération soit exacte, il faut trouver pour quotient l'autre facteur (51).

La preuve de la division se fait en multipliant le diviseur et le quotient, et l'on doit recevoir pour produit le dividende, si l'opération est exacte (52)

La preuve par 9 se fait pour la multiplication, en retranchant tous les 9 de chaque facteur; on multiplie les deux restes, et de ce produit on retranche de même tous les 9; le reste que l'on obtient alors doit être le même, si l'opération est exacte, que celui que l'on reçoit après avoir retranché tous les 9 du produit total.

Pour connaître le reste que présente la suppression de tous les 9 dans un nombre, il suffit d'ajouter les chiffres de ce nombre comme des unités simples, et d'en retrancher les 9 (53).

La preuve de la division se fait de la même manière, en considérant le diviseur et le quotient comme facteurs et le dividende comme produit. Si la division avait un reste, il faudrait le retrancher du dividende avant de faire la preuve (54).

Questions sur la division.

(57) 1° Qu'est-ce que la division? — 2° Quels sont les deux buts que l'on peut se proposer dans la division? — 3° Qu'est-ce que le dividende, qu'est-ce que le diviseur et qu'est-ce que le quotient? — 4° De quelle opération dépend la division? — 5° De combien de manières peut-on faire une division? — 6° Que fait-on lorsque le diviseur n'est pas contenu dans un dividende partiel? — 7° Comment connaît-on la valeur des chiffres du quotient à mesure qu'on les pose? — 8° Les unités du quotient sont-elles de même nature que celles du dividende ou du diviseur? — 9° Comment abrège-t-on la division par 10, 100, 1000, etc.? — 10° Comment abrège-t-on une division lorsque le dividende et le diviseur sont terminés par des zéros? — 11° Sur quel principe est fondée cette abréviation? — 12° Démontrez matériellement ce principe au moyen de lignes. — 13° Comment peut-on encore abréger la division? — 14° Quel changement s'opère-t-il dans le quotient si l'on divise par la moitié ou le tiers du diviseur? — 15° Même question que la précédente si l'on divise par le double ou le triple du diviseur? — 16° Comment se fait la preuve de la multiplication? — 17° Comment se fait la preuve de la division? — 18° Comment se fait la preuve par 9? — 19° Par quel moyen peut-on con-

naître le reste que présente la suppression des 9 dans un nombre?

Réponses aux questions précédentes (*).

1°, 2° On peut se proposer de partager un nombre en parties égales ou de voir combien un nombre est contenu de fois dans un autre nombre. — 3°, 4° De la soustraction. — 5° De deux manières, par la soustraction et par la division proprement dite. — 6° On met un zéro au quotient. — 7° Chaque chiffre du quotient a la même valeur que le dernier chiffre à droite du dividende partiel dont il est quotient. — 8° La nature de la question détermine l'espèce d'unité du quotient; quelquefois elles n'ont de rapport ni avec celles du dividende ni avec celles du diviseur. — 9°, 10° En retranchant un nombre égal de zéros du diviseur et du dividende. — 11° Sur ce principe, que l'on peut diviser ou multiplier le dividende et le diviseur par le même nombre sans changer la valeur du quotient. — 12° Voy. n° (46). — 13° Au lieu de poser sous chaque dividende partiel le produit du diviseur par chaque chiffre du quotient, on peut soustraire ce produit de suite à mesure qu'on le forme. — 14° Le quotient est doublé ou triplé. — 15° Le quotient est réduit à la moitié ou au tiers. — 16° En divisant le produit par l'un des deux facteurs. — 17° En multipliant le quotient par le diviseur. —

(*) Les réponses aux questions extrêmement faciles ne sont point indiquées.

18° (Voyez la fin de la théorie de la division). — 19° En retranchant tous les 9 de la somme des chiffres qui composent un nombre, ajoutés ensemble comme des unités simples.

§ VI.

FRACTIONS (x).

Notions préliminaires.

(58) Nous avons vu que l'unité est une quantité que l'on prend pour terme de comparaison de toutes les quantités de même espèce; or, cette quantité peut être partagée en un nombre indéfini de parties. Si on la partage en 2 parties on aura 2 demies, en 3 on aura 3 tiers, en 4 on aura 4 quarts, en 5 on aura 5 cinquièmes, etc.; ces parties de l'unité se nomment *fractions*.

L'unité pouvant être plus ou moins grande, il s'ensuit que la grandeur des fractions est relative, et qu'elle dépend entièrement de celle de l'unité principale.

Plus il y a de parties dans une unité, plus elles deviennent petites; elles diminuent dans la même proportion que le nombre en augmente. Ainsi, si l'on double le nombre des parties contenues dans une unité, elles deviendront deux fois plus petites; si on le triple, elles deviendront trois fois plus petites. De même si l'on rend le nombre de ces parties deux fois plus petit, la valeur de chacune sera doublée : ainsi une demie est plus qu'un tiers, un tiers plus qu'un quart, etc. Remarquez que lorsqu'on compare deux fractions de cette manière, il faut toujours supposer qu'elles proviennent d'unités parfaitement semblables, car il est clair que le tiers ou le quart d'une grande unité peuvent être plus grands que la moitié d'une unité plus petite.

On peut souvent considérer une unité comme fraction d'une unité plus grande, et une fraction comme unité si on la prend pour terme de comparaison d'une autre quantité de même espèce. Ainsi un *pied* est une véritable fraction de la toise; un *pouce* qui est une fraction du pied, est aussi considéré comme unité des quantités que l'on mesure en pouces. C'est ce qui a lieu pour les pieds, mesures et monnaies.

D'après ce que nous venons de dire, on voit que la valeur d'une fraction dépend de deux choses. La première est le nombre des parties contenues dans l'unité, et la seconde le nombre des parties contenues dans la fraction. Ainsi quand on dit : *trois cinquièmes*, l'unité contient 5 parties, mais on n'en prend que trois. C'est pourquoi on se sert de deux nombres pour exprimer une fraction, dont l'un indique en combien de parties l'unité est partagée et se nomme *dénominateur*, l'autre indique combien la fraction contient de ces parties et se nomme pour cette raison *numérateur*. On les place l'un au dessous de l'autre, séparés par un trait, le dénominateur en bas. Ainsi, *trois cinquièmes* s'écrit $\frac{3}{5}$, $\frac{15}{20}$ se prononce *quinze vingtièmes*. Le numérateur et le dénominateur prennent le nom commun de *termes*.

Observation. Il est très-important de faire acquérir à l'élève une idée exacte de ces deux nombres. Ce qui rend souvent le calcul des fractions difficile à concevoir, c'est que l'on néglige de s'assurer si l'élève distingue bien leurs différentes propriétés. On y parviendra facilement par le moyen des exercices du second Cours sur les fractions, dont le but est de donner sur cette partie des idées claires et précises.

On fera écrire sous la forme de fractions ordinaires différents nombres complexes, tels que :

3 liv. 5 onc. $= 3\frac{5}{16}$. 6 liv. 8 onc. $= 6\frac{8}{16}$. $= 6\frac{1}{2}$.
6 pieds 8 pouces $= 6\frac{8}{12}$.

Nous avons vu que plus une fraction contient de parties, plus ces parties sont petites. Or, de deux fractions telles que $\frac{3}{5}$ et $\frac{3}{10}$, qui ont même numérateur et dénominateurs différents, la plus forte est celle qui a le plus petit dénominateur; et de deux fractions telles que $\frac{3}{16}$ et $\frac{9}{16}$, qui ont le même dénominateur, mais un numérateur différent, la plus forte est celle qui a le plus fort numérateur.

On peut conclure de cette observation, que plus le dénominateur d'une fraction est fort, plus la fraction est faible, et que plus le numérateur est fort, plus la fraction est grande.

(59) Soit la fraction $\frac{6}{16}$ dont on multiplie le dénominateur par 2, on aura $\frac{6}{32}$. Il est clair que cette fraction est devenue deux fois plus petite, ou, ce qui est la même chose, on en a pris la moitié. Si l'on avait multiplié le dénominateur par 3 ou par 4, on en aurait pris le tiers ou le quart.

Si l'on multiplie par 2 le numérateur de la même fraction $\frac{6}{16}$, on aura $\frac{12}{16}$; or, il est évident que cette fraction est double de la première, puisqu'on double le nombre des parties qu'elle contient.

Si l'on divise par 2 le dénominateur de la même fraction $\frac{6}{16}$, on aura $\frac{6}{8}$. Comme l'unité contient alors la moitié moins de parties, celles-ci sont deux fois plus fortes, et par conséquent la fraction est doublée.

Enfin si l'on divise le numérateur de $\frac{6}{16}$ par 2, on aura $\frac{3}{16}$, fraction qui est la moitié de la première.

De ces diverses observations, on conclut, 1° que pour diminuer une fraction, il faut diviser son numérateur ou multiplier son dénominateur; 2° que pour augmenter une fraction, il faut multiplier son numérateur ou diviser son dénominateur.

On s'exercera à prendre la moitié, le tiers, le quart des fractions suivantes, ou à les doubler, tripler, quadrupler, etc., par les moyens que nous venons d'indiquer.

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{6}{8}$.

(60) Nous venons de voir qu'on diminue une fraction en multipliant son dénominateur, et que le contraire a lieu lorsqu'on multiplie son numérateur; or, qu'arrivera-t-il si l'on multiplie en même temps les deux termes et par le même? par exemple $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{8}$.

Puisque d'un côté on diminue la fraction, et que de l'autre on l'augmente de la même quantité qu'on l'avait diminuée, elle ne doit pas avoir changé de valeur. C'est précisément comme si l'on ajoutait d'un côté d'une ligne ce que l'on aurait retranché de l'autre.

Il est facile de voir que la même chose a lieu si on divise les deux termes par le même nombre, mais d'une manière inverse.

Donc, si l'on multiplie ou si l'on divise les deux termes d'une fraction par le même nombre, elle ne change pas de valeur.

On s'exercera à changer l'expression d'une fraction, soit en multipliant, soit en divisant les termes; mais il est plus utile de s'exercer à les diviser.

Ainsi :

$$\frac{24}{36}=\frac{12}{18}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}.$$

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\frac{15}{20}=\frac{18}{24}, \text{ etc.}$$

Réduire une fraction à sa plus simple expression (*).

(61) A quelles fractions plus simples équivalent $\frac{4}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{20}{30}$, $\frac{30}{60}$? etc. (L'élève répond de tête à ces questions).

R. $\frac{4}{12}$ équivalent à $\frac{1}{3}$, $\frac{8}{12}$ à $\frac{2}{3}$, $\frac{15}{20}$ à $\frac{3}{4}$, $\frac{20}{30}$ à $\frac{2}{3}$, $\frac{30}{60}$ à $\frac{1}{2}$, etc.

Comme il est plus facile de se rendre compte d'une fraction exprimée par de petits nombres, que lorsqu'elle l'est avec de grands nombres, et aussi pour éviter la longueur des opérations, il faut autant qu'on le peut, simplifier l'expression des fractions sur les-

---

(*) *Voy.* le second Cours, vol. I, pag. 156, différentes manières d'exprimer une fraction.

quelles on doit opérer. Voici le moyen d'y parvenir.

Nous avons vu qu'en divisant les deux termes d'une fraction par le même nombre, elle ne changeait pas de valeur; or il est clair qu'elle sera exprimée d'une manière plus simple, après avoir réduit les termes à de plus petits nombres. Pour cela il faut en trouver un qui soit en même temps sous-multiple du numérateur et du dénominateur.

Dans $\frac{32}{40}$, par exemple, on trouve que 8 est contenu 4 fois dans le numérateur et 5 fois dans le dénominateur, ce qui réduit cette fraction à $\frac{4}{5}$.

Simplifiez de cette manière l'expression des fractions suivantes : $\frac{24}{60}$, $\frac{33}{55}$, $\frac{19}{30}$, $\frac{21}{27}$, $\frac{17}{51}$, $\frac{38}{72}$.

On parvient à cette réduction en divisant les deux termes par 2 autant de fois que cela se peut, et ensuite par 3, 5, 7, 11 et autres nombres premiers (27, page 46). $\frac{48}{72}$, par exemple, peut être divisé par 2, ce qui réduit cette fraction à $\frac{24}{36}$, une seconde fois par 2 donne $\frac{12}{18}$, une troisième fois donne $\frac{6}{9}$. Les divisions par 2 sont épuisées; mais on peut diviser 6 et 9 par 3, on aura donc $\frac{2}{3}$ pour la plus simple expression de $\frac{48}{72}$.

Si les deux termes ne peuvent pas être divisés par 2, on essaie par 3, 5, 7, 11, etc., c'est-à-dire par les nombres premiers; car il serait inutile d'essayer la division par 4 ou par 8, quand on a épuisé toutes les divisions par 2. Il serait de même inutile d'essayer de diviser par 6 ou 9, lorsqu'on ne peut plus diviser par 3.

(62) Voici plusieurs principes qui pourront aider dans cette recherche.

1° On connaît qu'un nombre est divisible par 2, lorsqu'il est *pair* ;

2° Un nombre est divisible par 5, lorsqu'il est terminé par un 5 ou par un zéro ;

3° Lorsque la somme des chiffres d'un nombre ajoutés ensemble comme des unités simples est un nombre divisible par 3 ou par 9, le nombre entier est aussi divisible par 3 ou par 9 ; par exemple, en ajoutant les chiffres de 26883 on trouve 27, nombre divisible par 3 et par 9 ; on en conclut que si l'on divise 26883 par 3 ou par 9 on ne trouvera point de reste ;

4° Lorsque les deux termes sont terminés par des zéros, on peut en retrancher un nombre égal de chaque terme, et la fraction n'aura pas changé de valeur, parce que ces deux termes auront été divisés par 10, 100, 1000, etc. ; ainsi : $\frac{5000}{7800}=\frac{50}{78}$.

(63) Il est aisé de concevoir qu'on s'éviterait beaucoup de recherches et d'essais inutiles, si l'on connaissait de suite le plus grand nombre qui divise exactement les deux termes. Ce nombre se nomme *le plus grand commun diviseur* ; voici l'opération par laquelle on le trouve :

$$\frac{60}{144} \qquad \begin{array}{c|c|c|c} 144 & \overset{2}{60} & \overset{2}{24} & \overset{2}{12} \\ 24 & 12 & 0 & \end{array}$$

On divise le plus grand terme par le plus petit, 144 par 60. Il y est contenu 2 fois et il reste 24. On pose le quotient 2 au dessus du diviseur, parce qu'il n'est plus d'aucune utilité.

On divise de nouveau 60 par le *reste* 24, il reste 12; on divise le premier reste 24 par le second reste 12, cette fois l'opération se fait exactement; on en conclut que c'est 12 qui est le plus grand commun diviseur. En effet en divisant 60 et 144 par 12, on trouve $\frac{5}{12}$, qui est la plus simple expression de $\frac{60}{144}$.

L'opération se réduit donc à diviser le plus grand terme par le plus petit, celui-ci par le reste, ce reste par le nouveau reste et ainsi de suite, jusqu'à ce que la division s'opère sans reste. C'est le nombre qui a divisé exactement qui est le plus grand commun diviseur.

Il arrive souvent qu'on trouve pour dernier reste l'unité. C'est une preuve que la fraction est irréductible, puisque le plus grand commun diviseur est 1, exemple :

$$\frac{37}{229} \qquad \begin{array}{c|c|c|c} 229 & \overset{2}{37} & \overset{2}{7} & \overset{2}{2} \\ 7 & 2 & 1 & \end{array}$$

Voici deux observations nécessaires pour cette réduction :

1° Si le numérateur est une partie exacte du dénominateur, comme dans $\frac{12}{36}$, c'est ce numérateur qui est lui-même le plus grand commun diviseur;

2° Si l'un des termes est un nombre prémier, la fraction est irréductible; exemple : $\frac{29}{36}$. Elle serait cependant réductible dans le cas où le numérateur étant un nombre premier serait sous-multiple du dénominateur comme $\frac{11}{44}=\frac{1}{4}$.

(64) Dans une fraction le numérateur est ordinairement plus petit que le dénominateur, comme $\frac{3}{8}$; quelquefois les deux termes sont égaux, comme $\frac{8}{8}$; d'autres fois le numérateur est plus grand que le dénominateur, comme $\frac{20}{8}$. (Sec. Cours, page 140).

Dans le premier cas la fraction est moindre qu'un entier, dans le second elle équivaut à un entier, et dans le troisième elle vaut plus qu'un entier. On dit alors que c'est un nombre *fractionnaire;* on appelle ainsi tout nombre qui renferme des unités et des fractions.

(65) — Combien les expressions fractionnaires suivantes, $\frac{62}{15}$, $\frac{44}{9}$, contiennent-elles d'entiers?

R. Puisqu'il faut 15 quinzièmes pour faire un entier, autant de fois il y aura 15 quinzièmes dans 62, autant il y aura d'entiers; ils y sont contenus 4 fois et il reste 2 quinzièmes, donc $\frac{62}{15}=4\frac{2}{15}$.

9 étant contenu dans 44 4 fois plus 8, il en résulte que $\frac{44}{9}=4\frac{8}{9}$.

Donc pour extraire les entiers contenus dans une expression fractionnaire, il faut diviser le numérateur par le dénominateur; le quotient est le nombre d'entiers.

Extrayez les entiers de $\frac{124}{17}$, $\frac{323}{60}$, $\frac{630}{20}$, $\frac{700}{30}$, $\frac{826}{44}$.

Remarquez qu'avant de faire la division il faut autant que possible simplifier l'expression de la fraction. Ainsi pour $\frac{630}{20}$, au lieu de diviser 630 par 20, je retranche un zéro de part et d'autre, et je divise 63 par 2.

(66) Combien 10 $\frac{3}{7}$ font-ils de septièmes? (Second Cours, page 141).

R. Un entier contient 7 septièmes, 10 entiers en contiennent 10×7 ou 70, plus 3 septièmes, font $\frac{73}{7}$. Pour convertir un certain nombre d'entiers en une fraction donnée, il faut multiplier le nombre d'entiers par le dénominateur proposé, et le produit sera le numérateur de cette fraction. Si les entiers sont accompagnés d'une fraction comme dans le cas précédent, il faut ajouter le numérateur de cette fraction au produit des entiers par le dénominateur.

(67) — Un tailleur a acheté 6 aunes $\frac{3}{4}$ d'étoffe pour 8 gilets; combien en a-t-il employé pour 1 gilet?

Solution. 6 aunes $\frac{3}{4} = \frac{27}{4}$, pour un gilet il en emploiera la huitième partie de $\frac{27}{4}$ ou $\frac{27}{32}$ (59); il faut donc $\frac{27}{32}$ d'aune pour un gilet.

— Si un ouvrier fait en 3 jours 7 toises $\frac{5}{6}$; combien cela fait-il par jour?

Solution. Il en fera en un jour le tiers de 7 $\frac{5}{6}$, le tiers de 7 toises est 2 toises et il en reste une qui, réunie aux $\frac{5}{6}$ font $\frac{11}{6}$, dont la troisième partie est $\frac{11}{18}$, donc en un jour il fera 2 toises $\frac{11}{18}$.

— Combien aura-t-on fait de lieues en 8 jours, si l'on fait $\frac{3}{4}$ de lieue par heure en marchant 6 heures par jour?

Solution. Si l'on fait $\frac{3}{4}$ de lieue par heure, en 6 heures on en fera 6 fois autant : $6 \times \frac{3}{4} = \frac{18}{4}$ ou 4 lieues $\frac{2}{4}$ ou 4 lieues $\frac{1}{2}$. En 8 jours ce sera 8 fois 4 $\frac{1}{2}$; $8 \times \frac{1}{2} = \frac{8}{2}$ ou 4 lieues, 8×4 lieues $=$ 32 lieues, $+$ 4 lieues $=$ 36 lieues.

Réduction des fractions au même dénominateur et addition. (Second Cours, pag. 141 et suiv.)

(68) *Observation.* Je fais marcher simultanément ces deux parties, parce que l'élève ne peut bien sentir l'utilité de la réduction au même dénominateur que par l'application que l'on en fait à l'addition.

On a acheté $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{6}{8}+\frac{1}{8}$ d'aune; combien a-t-on acheté en tout?

Il est évident que pour additionner ces quatre fractions, il faut ajouter leurs numérateurs. On trouve pour somme $\frac{15}{8}$ ou 1 aune $\frac{7}{8}$.

— Combien font $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{8}$?

R. Ces deux fractions n'ayant pas le même dénominateur ne peuvent être additionnées telles qu'elles sont là; mais on peut changer les quarts en huitièmes: $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}+\frac{5}{8}=\frac{11}{8}=1\,\frac{3}{8}$. D'où l'on voit qu'on ne peut additionner que les fractions de même nature, c'est-à-dire de même dénominateur. Dans le cas où elles sont différentes, on peut, comme on vient de le voir, les rendre semblables.

(69) On place ordinairement les fractions que l'on additionne en colonne verticale, comme les nombres entiers, et l'on place à côté le changement que l'on fait subir à l'expression de la fraction. Par exemple :

$$
\begin{array}{r}
\frac{1}{4} = \frac{6}{24} \\
\frac{5}{8} = \frac{15}{24} \\
\frac{21}{24} = \frac{21}{24} \\
\hline
\frac{42}{24} = 1\,\frac{18}{24}.
\end{array}
$$

On voit qu'on réduit ici toutes les fractions en vingt-quatrièmes, parce que c'est le plus fort dénominateur. La manière dont se fait ce changement est très-facile à concevoir : si l'on veut réduire $\frac{1}{4}$ en vingt-quatrièmes, on cherche par quel nombre il faut multiplier le dénominateur 4 pour avoir 24. On trouve que c'est 6 ; mais pour que la fraction ne change pas de valeur, il faut multiplier les deux termes par le même nombre 6, ce qui donne $\frac{6}{24}$.

Pour changer les huitièmes en vingt-quatrièmes, il faut multiplier le dénominateur 8 par 3, et pour que la fraction conserve sa valeur, il faut aussi multiplier le numérateur par 3 ; on aura donc $\frac{15}{24}$.

On pouvait aussi réduire les $\frac{21}{24}$ en huitièmes, en divisant les deux termes par 3, on aurait eu $\frac{7}{8}$. Il faut, autant qu'on le peut, éviter les grands nombres.

Exercices.

$$\begin{array}{lll}
\frac{2}{3} = \frac{4}{6} & \frac{1}{2} = \frac{8}{16} & \frac{5}{6} = \frac{10}{12} \\
\frac{3}{6} = \frac{3}{6} & \frac{2}{8} = \frac{4}{16} & \frac{2}{3} = \frac{8}{12} \\
\frac{15}{18} = \frac{5}{6} & \frac{15}{16} = \frac{15}{16} & \frac{7}{12} = \frac{7}{12} \\
\frac{12}{6} = 2 & \frac{3}{4} = \frac{12}{16} & \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \\
 & \frac{39}{16} = 2\frac{7}{16} & \frac{34}{12} = 2\,\frac{10}{12}.
\end{array}$$

(70) Jusqu'à présent il se trouvait dans la question un dénominateur auquel on pouvait rapporter tous les autres ; mais dans cette question $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$, les tiers ne peuvent être changés en quarts ni les quarts en tiers.

Observation. Il arrive souvent que l'élève trouve de lui-même qu'il faut chercher un dénominateur commun hors de la question. S'il ne le trouvait pas, on lui ferait remarquer que :

Les tiers et les quarts peuvent être changés en douzièmes, on aura donc $\frac{8}{12} + \frac{9}{12}$. On aurait pu de même les changer en vingt-quatrièmes, trente-sixièmes, quarante-huitièmes, etc ; mais il faut autant que possible employer les petits nombres.

Cherchez un dénominateur commun pour les fractions suivantes :

$$1^{\circ}\ \frac{5}{6} + \frac{3}{8};\quad 2^{\circ}\ \frac{3}{7} + \frac{3}{4};\quad 3^{\circ}\ \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}.$$

Lorsque les nombres sont petits, cette recherche est facile à faire de tête ; mais lorsqu'ils sont forts, elle devient impossible. Il faut alors se servir d'un moyen abrégé que nous allons indiquer.

Soit les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{5}$ à réduire au même dénominateur; on multiplie les deux termes de la première pour le dénominateur de la deuxième, ce qui donne $\frac{10}{15}$, et les deux termes de la deuxième pour le dénominateur de la première, ce qui donne $\frac{9}{15}$. Ces deux fractions sont, comme on le voit, réduites au même dénominateur; cela doit être ainsi, puisque les deux dénominateurs ont été multipliés l'un par l'autre, et que 3×5 ou 5×3 donnent le même produit.

En outre elles n'ont point changé de valeur, parce que les deux termes de chacune ont été multipliés par le même nombre.

Il faut donc, pour réduire deux fractions au même *dénominateur, multiplier les deux termes de chacune par le dénominateur de l'autre.*

(71) Lorsqu'il y a plus de deux fractions, l'opération se réduit toujours à multiplier les deux termes de chacune pour tous les autres dénominateurs que l'on ne considère que comme un seul nombre en les multipliant. Par exemple :

$$\tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{5}{7}.$$

On commence par multiplier la première fraction $\tfrac{2}{3}$ par le produit de 4×7. On aura donc pour numérateur $2 \times 28 = 56$, et pour dénominateur $3 \times 28 = 84$. La première fraction est donc $\tfrac{56}{84}$; on procède à la seconde en multipliant les deux termes par le produit de 3×7, ce qui donne $\tfrac{63}{84}$. Enfin pour la troisième on multiplie les deux termes 5 et 7 par le produit de 3×4, ce qui donne $\tfrac{60}{84}$.

$$\tfrac{56}{84} + \tfrac{63}{84} + \tfrac{60}{84} = \tfrac{179}{84} = 2\tfrac{11}{84}.$$

S'il y avait eu quatre fractions, on aurait multiplié les deux termes de chacune par le produit des trois autres dénominateurs.

Pour plus de facilité, l'opération se dispose ordinairement de la manière suivante :

$$\begin{array}{lcl}
\tfrac{3}{5}\ 5 & = & \tfrac{168}{280} \\
\tfrac{6}{7}\ 7 & = & \tfrac{240}{280} \\
\tfrac{1}{2}\ 2 & = & \tfrac{140}{280} \\
\tfrac{3}{4}\ 4 & = & \tfrac{210}{280} \\
\hline
 & & \tfrac{758}{280} = 2\,\tfrac{198}{280}.
\end{array}$$

Quelquefois les fractions à additionner ou à réduire au même dénominateur peuvent être exprimées d'une manière plus simple, c'est ce qu'il ne faut pas négliger de faire pour éviter les grands nombres. Quelquefois aussi il se trouve dans la question des fractions qui peuvent être additionnées facilement sans être réduites avec les autres. Toutes ces petites observations que la pratique rend plus faciles à remarquer, simplifient beaucoup les opérations, et c'est à quoi il faut tâcher de parvenir.

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}\ 3 = \frac{28}{84}$$
$$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}\ 4 = \frac{63}{84}$$
$$\frac{5}{7} = \frac{5}{7}\ 7 = \frac{60}{84}$$

Dans cette question, les $\frac{3}{9}$ peuvent être changés en $\frac{1}{3}$, et les $\frac{9}{12}$ en $\frac{3}{4}$. Le dénominateur commun est 84 au lieu de 756.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{5} = \frac{6}{10} \\ \frac{7}{10} = \frac{7}{10} \end{array}\right\} = \frac{13}{10} = 1\ \frac{3}{10}$$
$$\frac{9}{11}$$

Les deux fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{7}{10}$ ont pu être ajoutées facilement, et font ensemble $1\ \frac{3}{10}$ qu'il faut ajouter à $\frac{9}{11}$. Il n'y a donc plus que deux fractions à réduire au même dénominateur au lieu de trois. On trouve que $\frac{3}{10} = \frac{33}{110}$ et $\frac{9}{11} = \frac{90}{110}$, ensemble $\frac{123}{110}$ ou $1\ \frac{13}{110}$; plus 1 entier provenant de l'addition des deux premières fractions font $2\ \frac{13}{110}$.

Si donc on a une opération quelconque à faire sur les fractions, il faut d'abord voir s'il y en a qui puissent être exprimées d'une manière plus simple, et chercher s'il s'en trouve qui puissent être ajoutées facilement, ce qui simplifie toujours l'opération.

Exercices sur l'addition des fractions et sur leur réduction au même dénominateur.

(73) Rangez les fractions suivantes par ordre de valeur, c'est-à-dire mettez dans chaque question la plus faible la première et la plus forte la dernière.

1° $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{11}{24}$. 2° $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{5}{10}$.
3° $\frac{5}{7}$, $\frac{11}{13}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{5}{6}$. 4° $\frac{7}{12}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{1}{2}$.

Additionnez les nombres suivants :

5° $16\frac{1}{2} + 7\frac{1}{3} + 18\frac{1}{8} + 15\frac{7}{12} + 9\frac{5}{6}$.
6° $8\frac{5}{8} + 10\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + 1\frac{1}{2} + 4\frac{3}{6}$.

7° Un marchand a 4 coupons de drap ; le premier contient 50 aunes $\frac{3}{4}$, le second 46 aunes $\frac{1}{3}$, le troisième 56 annes $\frac{5}{6}$, et le quatrième 38 aunes $\frac{7}{8}$; combien contiennent-ils d'aunes ensemble ?

Réponses aux questions précédentes.

Après avoir réduit les fractions des quatre premières questions au même dénominateur, on trouve qu'elles doivent être placées dans l'ordre suivant :

1° $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{11}{24}$. 2° $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{11}$. 3° $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{13}$. 4° $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{4}{6}$. 5° $67\frac{17}{24}$. 6° $26\frac{5}{24}$. 7° $212\frac{13}{48}$.

Théorie de l'addition des fractions et des notions préliminaires.

(74) Les fractions sont des parties plus petites que

l'unité. On les exprime par deux nombres dont l'un indique en combien de parties l'unité est divisée et se nomme *dénominateur*. L'autre indique combien la fraction contient de ces parties et se nomme *numérateur*. Ces deux nombres prennent le nom commun de termes. Dans les fractions écrites, on les sépare par un trait horizontal en mettant le numérateur au dessus et le dénominateur au dessous (58).

Plus il y a de parties dans une unité, plus elles sont petites. Il suit de là qu'en multipliant le dénominateur d'une fraction on la rend plus petite, et qu'en le divisant on la rend plus grande.

On rend encore une fraction plus grande en multipliant son numérateur, et on la rend plus petite en le divisant (59).

Si l'on multiplie ou si l'on divise les deux termes d'une fraction par le même nombre, elle ne change pas de valeur (60).

On simplifie l'expression d'une fraction en divisant ses deux termes par le même nombre. Cette simplification se fait de deux manières : 1° en divisant les deux termes par 2 autant de fois que cela se peut, et ensuite par 3, 5, 7, 11 et autres nombres premiers (61) ; 2° en divisant les deux termes par le plus grand commun diviseur. On le trouve en divisant le plus grand terme par le plus petit, celui-ci par le reste, ce reste par le nouveau reste, et ainsi de suite jusqu'à ce que la division s'effectue exactement. C'est alors le nombre qui a divisé sans reste qui est le plus grand commun diviseur. Si le dernier reste est 1, la fraction est irréductible.

Une fraction est encore irréductible quand un des termes est un nombre premier, à moins que ce ne soit le numérateur, et que celui-ci soit sous-multiple du dénominateur.

Lorsque le numérateur est sous-multiple du dénominateur, c'est ce numérateur qui est le plus grand commun diviseur (63).

Lorsque le numérateur d'une fraction est plus grand que le dénominateur, et que par conséquent la fraction contient des entiers, on les extrait en divisant le numérateur par le dénominateur. Le quotient est le nombre d'entiers (65).

Si l'on veut exprimer des entiers sous la forme d'une fraction, il faut multiplier le nombre d'entiers par le dénominateur de la fraction proposée, et le produit est le numérateur de cette nouvelle fraction (66).

Pour additionner des fractions, il faut ajouter les numérateurs. Pour que les fractions soient susceptibles d'addition, il faut qu'elles aient le même dénominateur : si elles sont différentes, on les réduit au même dénominateur d'après la règle suivante.

Multipliez les deux termes de chaque fraction par le dénominateur de l'autre. Mais cette règle peut être simplifiée dans plusieurs circonstances (68, 69, 70, 71, 72).

Nota. Les questions et les applications sur les fractions sont réunies après la division.

Soustraction des fractions.

(75) — Un tailleur avait un morceau de drap de $\frac{3}{4}$, il en emploie $\frac{1}{4}$; combien lui en reste-t-il?

Il est aisé de remarquer que pour soustraire une fraction d'une autre, il suffit de retrancher le numérateur de la plus petite du numérateur de la plus forte. Ainsi $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$; $12\,\frac{8}{12} - 6\,\frac{4}{12} = 6\,\frac{4}{12}$.

Soustrayez $3\,\frac{3}{4}$ de $7\,\frac{1}{4}$.

L'opération se dispose comme pour les nombres entiers, et l'on soustrait la fraction de la fraction et les entiers des entiers.

$$\begin{array}{r} 7\,\frac{1}{4} \\ -\ 3\,\frac{3}{4} \\ \hline 3\,\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{array}$$

Ici la fraction $\frac{3}{4}$ ne peut pas être soustraite de $\frac{1}{4}$. Il faut alors prendre 1 unité sur les 7 entiers, et on l'ajoutera à la fraction. 1 entier et 1 quart font 5 quarts dont on retranche $\frac{3}{4}$, il reste $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$. 3 entiers de 6 entiers (parce qu'on en a emprunté 1), il en reste 3.

(76) Soustrayez $2\,\frac{2}{3}$ de $6\,\frac{5}{8}$.

Ces deux fractions n'étant pas de même nature, il faut les réduire au même dénominateur, ce qui donne $6\,\frac{15}{24} - 2\,\frac{16}{24} = 3\,\frac{23}{24}$.

On voit par là que pour les fractions il est indispensable qu'elles aient le même dénominateur. On se sert aussi de cette réduction pour comparer deux fractions et voir laquelle des deux est la plus forte.

Par exemple, si l'on veut savoir si $\frac{3}{4}$ est plus ou moins que $\frac{2}{3}$, on les réduit en douzièmes. On trouve pour la première $\frac{9}{12}$, et pour la seconde $\frac{8}{12}$, d'où l'on conclut que la fraction $\frac{3}{4}$ est de $\frac{1}{12}$ plus grande que $\frac{2}{3}$.

Exercices sur la soustraction.

(77) 1° J'ai acheté 18 aunes $\frac{3}{8}$, et j'en ai employé 7 $\frac{3}{4}$; combien m'en reste-t-il?

2° Un tailleur avait un coupon de drap de 24 aunes $\frac{2}{3}$, il en prend pour faire 3 gilets à $\frac{7}{12}$ pour 1 gilet, et pour 2 habits à 1 aune $\frac{1}{2}$ pour un habit; combien lui en est-il resté?

3° Il y avait un ouvrage de 50 toises $\frac{5}{8}$ à faire. Un ouvrier en a fait 6 toises $\frac{2}{3}$, un autre ouvrier 7 toises $\frac{1}{2}$, et un troisième 4 toises $\frac{5}{6}$; combien en est-il resté à faire?

4° 4 ouvriers ont fait un ouvrage de 34 toises $\frac{1}{6}$. Le premier en a fait 3 toises $\frac{3}{4}$, le second 12 toises $\frac{1}{2}$, les deux autres en ont fait autant l'un que l'autre; quel est le travail de ces derniers?

Réponses aux questions précédentes.

— 1° 10 aunes $\frac{5}{8}$; — 2° 19 aunes $\frac{11}{12}$; — 3° 31 toises $\frac{5}{8}$; — 4° chacun des deux derniers ouvriers fait 8 toises $\frac{23}{24}$.

Théorie de la soustraction des fractions.

(78) La soustraction des fractions se réduit à soustraire le numérateur de la plus petite du numérateur de la plus forte.

S'il y a des entiers et si la fraction du nombre à soustraire ne peut être soustraite de l'autre fraction, il faut emprunter un entier sur les unités et le transformer en fraction, en lui donnant pour dénominateur le dénominateur même de la fraction (66).

Si les fractions sont de différentes espèces, on les réduit au même dénominateur (68 et suiv.)

Multiplication des fractions (XI).

(79) 1° Si une aune coûte 8 fr., combien coûteront 3 aunes?

2° Si une aune coûte 8 fr., combien coûteront 4 aunes $\frac{1}{2}$?

3° Si une aune coûte 8 fr., combien coûteront 5 aunes $\frac{3}{4}$?

4° Si un ouvrier fait en un jour 6 toises $\frac{1}{2}$, combien en fera-t-il en 5 jours $\frac{1}{4}$?

5° Si une aune coûte 9 fr., combien coûteront $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$?

Dans le premier cas il faut multiplier 8 par 3; dans le second il faut multiplier 8 par 4 $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire le répéter 4 fois, plus $\frac{1}{2}$ fois. Répéter une quantité quelconque $\frac{1}{2}$ fois n'est autre chose qu'en prendre la moitié; or dans le cas dont il s'agit, il faut multiplier 8 par 4 et ajouter au produit la moitié de 8.

Dans le troisième cas il faut multiplier 8 par 5 $\frac{3}{4}$, c'est-à-dire le multiplier par 5 et le répéter ensuite $\frac{3}{4}$ de fois. Répéter un nombre $\frac{3}{4}$ de fois, c'est en prendre le quart et le répéter 3 fois : ainsi $8 \times 5\frac{3}{4} = 8 \times 5$ ou 40, $+$ les $\frac{3}{4}$ de $8 = 46$.

Dans le quatrième cas il faut multiplier $6\frac{1}{2}$ par $5\frac{1}{4}$, c'est-à-dire répéter $6\frac{1}{2}$ 5 fois et $\frac{1}{4}$ de fois : ainsi $6\frac{1}{2} \times 5 = 32\frac{1}{2}$, $+$ le quart de $6\frac{1}{2}$ qui est $1\frac{5}{8} = 33\frac{9}{8}$ ou $34\frac{1}{8}$.

Dans le cinquième cas il faut multiplier 9 par $\frac{1}{2}$ ou par $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, c'est-à-dire qu'il faut en prendre la moitié, ou le quart, ou les trois quarts, ou les cinq sixièmes.

On voit donc que multiplier un nombre par $\frac{1}{2}$ c'est en prendre la moitié, par $\frac{1}{3}$ c'est en prendre la troisième partie, par $\frac{3}{4}$ c'est en prendre le quart et le répéter 3 fois.

$$
\begin{aligned}
12 \times 3 &= 36 \\
12 \times 2 &= 24 \\
\hline
12 \times \tfrac{1}{2} &= 6 \\
12 \times \tfrac{1}{4} &= 3 \\
12 \times \tfrac{3}{4} &= 9
\end{aligned}
$$

En comparant les produits précédents aux multiplicandes, on remarque que les produits provenant de la multiplication par des entiers sont plus forts que le multiplicande, tandis que ceux qui proviennent de la multiplication par une fraction sont plus petits.

On conclut de cette observation que la multiplication par des fractions diffère de celle des entiers en ce qu'elle est une véritable division ; et bien qu'on lui donne le nom de multiplication, les résultats sont tout-à-fait différents de ceux de la multiplication proprement dite, différence qu'il est très-important de bien comprendre pour l'intelligence de la plupart des opérations sur les fractions décimales et sur les nombres complexes.

Observation. On ne passera plus loin que lorsque l'élève aura acquis de ce principe une parfaite intuition. On lui fera multiplier un nombre successivement par des entiers et par des fractions, et même une fraction par une fraction, ce qu'il peut faire sans formule et par le seul raisonnement. Si l'on donne, par exemple, $\frac{3}{4}$ à multiplier par $\frac{1}{2}$, on aura $\frac{3}{8}$ (59). Pour multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{4}{5}$, il faut prendre le cinquième de $\frac{3}{4}$ qui est $\frac{3}{20}$ et le répéter 4 fois : $4 \times \frac{3}{20} = \frac{12}{20}$.

Après avoir rappelé la définition ordinaire de la multiplication, on demandera si elle peut convenir à celle des fractions.

(80) Il est évident que la définition ordinaire de la multiplication des entiers ne peut convenir à celle des fractions, puisqu'au lieu de répéter un nombre plusieurs fois on le divise ; mais il en est une autre qui convient également à toutes les deux.

En comparant le multiplicande avec le produit et le multiplicateur avec l'unité, on trouvera qu'il y a le même rapport, c'est-à-dire que si le multiplicateur est deux fois l'unité, le produit est deux fois le multiplicande ; si le multiplicateur est une demi-unité, le produit est la moitié du multiplicande ; s'il en est les trois quarts, le produit sera aussi les trois quarts du multiplicande, etc. On peut donc dire que *la multiplication est une opération dont le produit est au* *multiplicande ce que le multiplicateur est à l'unité.* Cette définition a l'avantage d'être basée sur une propriété de la multiplication, mais elle a l'inconvénient de ne point indiquer l'usage de cette opération.

(81) — Si l'on fait $\frac{2}{3}$ de page en 1 heure, combien en fera-t-on en $\frac{1}{4}$ d'heure?

Il faut multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{1}{4}$, c'est-à-dire en prendre le quart, ce que l'on fait en multipliant le dénominateur 3 par le dénominateur 4, on aura $\frac{2}{12}$.

Si l'on voulait savoir combien on en ferait en $\frac{3}{4}$ d'heure, il faudrait répéter $\frac{2}{12}$ trois fois, en multipliant le numérateur 2 par 3, on aura $\frac{6}{12}$.

On voit qu'on obtient le produit d'une fraction par une autre fraction, en multipliant le numérateur de l'une par le numérateur de l'autre, et de même le dénominateur par le dénominateur.

Multiplier $\frac{3}{7}$ par $\frac{3}{4}$, c'est faire l'opération suivante : $\frac{3}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{28}$. En effet, en multipliant le dénominateur 7 par le dénominateur 4 on en prend le quart, et en multipliant le numérateur de la première par le numérateur de la seconde, on répète le quart trois fois.

Donc pour multiplier une fraction par une autre, il faut multiplier numérateur par numérateur et dénominateur par dénominateur (XII).

(82) Si l'on fait 6 pieds d'ouvrage en 1 heure, combien en fera-t-on en $\frac{3}{4}$ d'heure?

Ici c'est un nombre entier à multiplier par une fraction. On peut le faire de deux manières : premièrement en prenant le quart de 6 qui est 1 $\frac{1}{2}$ et en le répétant 3 fois, ce qui donne 4 $\frac{1}{2}$; ou bien on considère le nombre entier comme un numérateur auquel on donne l'unité pour dénominateur, et on fait la multiplication par la règle ordinaire :

$$\tfrac{6}{1} \times \tfrac{3}{4} = \tfrac{18}{4} = 4\tfrac{2}{4}.$$

(83) — Si un ouvrier fait en un jour 6 toises $\frac{2}{3}$, combien en fera-t-il en 3 jours $\frac{3}{4}$?

Il faut multiplier 6 $\frac{2}{3}$ par 3 $\frac{3}{4}$.

On peut le faire de deux manières :

1° On multiplie 6 $\frac{2}{3}$ par 3, ce qui donne 20 ; on prend ensuite les trois quarts de 6 $\frac{2}{3}$ que l'on ajoute à 20. Le quart de 6 est 1 et il reste 2 entiers que l'on réduit en tiers, ce qui fait $\frac{8}{3}$; le quart de $\frac{8}{3}$ est $\frac{2}{3}$, 3 fois 1 $\frac{2}{3}$ font 5, 20 plus 5 font 25.

2° On peut réduire les entiers en fractions et faire l'opération comme il a été indiqué (81).

$$6\tfrac{2}{3} = \tfrac{20}{3}. \quad 3\tfrac{3}{4} = \tfrac{15}{4}.$$
$$\tfrac{20}{3} \times \tfrac{15}{4} = \tfrac{300}{12} = 25.$$

On conçoit que si les nombres entiers étaient très-forts, ce dernier moyen entraînerait à une opération fort longue ; c'est pourquoi le premier est à préférer dans beaucoup de cas. L'usage apprendra celui qu'il est plus convenable d'employer, suivant la nature de la question.

(84) — Quels sont les $\frac{3}{4}$ de $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{2}$?

Il est clair que cette question se réduit à prendre les $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{2}$, ce qui donne $\frac{3}{10}$ et ensuite les $\frac{3}{4}$ de $\frac{3}{10}$ ou $\frac{9}{40}$. Il faut donc faire deux multiplications, et chaque fraction est considérée comme facteur. Il y aurait un plus grand nombre de fractions que l'opération serait la même.

On obtiendra le même résultat en multipliant tous les numérateurs entre eux ainsi que les dénominateurs; ainsi : $3 \times 3 \times 1 = 9$, $4 \times 5 \times 2 = 40 = \frac{9}{40}$.

Ces suites de fractions, considérées comme facteurs, se nomment *fractions de fractions*.

Théorie de la multiplication des fractions.

Multiplier un nombre par $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{8}$, etc., c'est en prendre le $\frac{1}{3}$, les $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{8}$, etc. D'où l'on voit que la multiplication par une fraction diffère de la multiplication par des entiers, 1° en ce que la première est une véritable division; 2° en ce que le produit de la multiplication par une fraction est toujours plus petit que le multiplicande (79).

Il faut aussi remarquer que ce produit est toujours dans le même rapport avec le multiplicande que le multiplicateur avec l'unité; d'où l'on voit que la définition ordinaire de la multiplication ne convient point à celle des fractions. Celle-ci, au contraire, convient également à toutes les deux : la multiplication est une opération dont le produit est au multiplicande ce que le multiplicateur est à l'unité (80).

Pour obtenir le produit d'une fraction par un nombre entier, il faut multiplier le numérateur de cette fraction par le nombre entier et lui laisser son dénominateur (82).

Si l'on a à multiplier une fraction par une autre fraction, il faut multiplier le numérateur de l'une par le numérateur de l'autre, et le dénominateur par le dénominateur (81).

Si les fractions à multiplier sont accompagnées d'entiers, on réduit chaque nombre fractionnaire en fraction, et l'on multiplie d'après la règle donnée ci-dessus. On peut aussi multiplier le nombre fractionnaire multiplicande par les entiers du multiplicateur, et ensuite multiplier de nouveau le multiplicande par la fraction multiplicateur et ajouter les deux produits.

Nota. Les applications de la multiplication des fractions sont à la fin des fractions.

Division des fractions.

(85) La division est une opération par laquelle on partage un nombre en plusieurs parties égales, ou par laquelle on voit combien un nombre est contenu de fois dans un autre.

On peut donc avoir deux buts en faisant une division de fractions, c'est-à-dire qu'on peut prendre, par exemple, le $\frac{1}{6}$ de $\frac{5}{6}$, ou voir combien $\frac{1}{6}$ est conteuu de fois dans $\frac{5}{6}$.

Lorsqu'il s'agit de prendre le $\frac{1}{6}$ de $\frac{5}{6}$, on a pour résultat $\frac{5}{36}$. Dans le second cas, au contraire, on voit que $\frac{1}{6}$ est contenu 5 fois dans $\frac{5}{6}$. Les deux résultats, comme on le voit, sont très-différents, ce qui n'a pas lieu avec les nombres entiers. Mais le premier de ces deux cas appartient à la multiplication des fractions, la division comprend le second seulement.

— Combien $\frac{3}{8}$ sont-ils contenus de fois dans $\frac{6}{8}$?
R. 2 fois.

Mais il peut arriver qu'une fraction ne soit pas exactement divisible par l'autre ou qu'elle n'ait pas le même dénominateur. Voici comment on raisonne cette opération.

Pour bien comprendre ce raisonnement, il faut se pénétrer de ce principe, que le quotient d'une division varie en proportion inverse du diviseur, c'est-à-dire que si l'on double ou triple ce dernier, le quotient devient deux ou trois fois plus petit, ou si l'on rend le diviseur deux ou trois fois plus petit, le quotient sera deux ou trois fois plus grand.

Soit $\frac{1}{3}$ à diviser par $\frac{1}{8}$, c'est-à-dire que l'on veut voir combien $\frac{1}{8}$ est contenu de fois dans $\frac{1}{3}$.

Un entier doit être contenu dans $\frac{1}{3}$ un tiers de fois; mais $\frac{1}{8}$ étant 8 fois plus petit qu'un entier, doit y être contenu 8 fois plus; on aura donc pour quotient $\frac{8}{3}$ ou 2 fois $\frac{2}{3}$ de fois.

— Combien $\frac{1}{10}$ est-il contenu de fois dans $\frac{1}{2}$?

R. Un entier serait contenu dans $\frac{1}{2}$ une demi-fois, et $\frac{1}{10}$ doit y être contenu dix fois autant, c'est-à-dire $\frac{10}{2}$ fois ou 5 fois.

— Combien $\frac{1}{7}$ est-il contenu de fois dans $\frac{1}{6}$?

— Combien $\frac{1}{11}$ est-il contenu de fois dans $\frac{1}{4}$?

— Combien $\frac{1}{5}$ est-il contenu de fois dans $\frac{3}{4}$?

R. Un entier serait contenu dans $\frac{3}{4}$ trois quarts de fois, mais $\frac{1}{5}$ y est contenu 5 fois autant, par conséquent $\frac{15}{4}$ de fois ou 3 fois $\frac{3}{4}$.

— Combien $\frac{1}{7}$ est-il contenu de fois dans $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{3}$, etc.?

(86) — Combien $\frac{2}{3}$ sont-ils contenus de fois dans $\frac{5}{6}$?

Solution. Un entier serait contenu dans $\frac{5}{6}$ cinq sixièmes de fois, $\frac{1}{3}$ y est contenu trois fois autant ou $\frac{15}{6}$ de fois, mais $\frac{2}{3}$ doivent être contenus dans $\frac{5}{6}$ 2 fois moins qu'un tiers ou $\frac{15}{12}$ de fois ou 1 fois $\frac{3}{12}$.

On voit que pour trouver le quotient d'une fraction par une autre, l'opération se réduit à multiplier le numérateur de la fraction dividende par le dénominateur de la fraction diviseur, et le dénominateur de la fraction dividende par le numérateur de la fraction diviseur. Par exemple :

$$\frac{6}{7} : \frac{2}{5} = \frac{30}{14} \text{ ou 2 fois } \frac{2}{14}.$$

Mais pour éviter la confusion, on renverse la fraction diviseur, c'est-à-dire que l'on met le dénominateur à la place du numérateur *et vice versâ*, et l'opération revient à une multiplication (XIII), par exemple $\frac{5}{8} : \frac{2}{7}$.

$$\frac{5}{8} \times \frac{7}{2} = \frac{35}{16} \text{ ou 2 fois } \frac{3}{16}.$$

Les entiers que l'on reçoit souvent en divisant une fraction par une autre, indiquent le nombre de fois qu'une fraction en contient une autre.

(87) Si l'on avait un nombre entier à diviser par une fraction, par exemple 8 à diviser par $\frac{1}{3}$, il faudrait mettre l'entier sous la forme d'une fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur, on opérera ensuite comme il a été indiqué ci-dessus.

$$8 : \frac{1}{3} = \frac{8}{1} : \frac{3}{1} = \frac{24}{1} \text{ ou 24 fois.}$$

$$7 : \frac{3}{4} = \frac{7}{1} ; \frac{4}{3} = \frac{28}{3} \text{ ou 9 fois } \frac{1}{3}.$$

Théorie de la division des fractions.

(88) Le but de la division par une fraction est de voir combien une fraction est contenue de fois dans un dividende quelconque. On obtient le quotient d'une fraction divisée par une autre fraction, en multipliant le dénominateur de la fraction dividende par le numérateur de la fraction diviseur, et le numérateur de la fraction dividende par le dénominateur de la fraction diviseur, ou ce qui revient au même et pour que l'opération soit plus claire, on renverse les termes de la fraction diviseur et l'on fait l'opération comme dans la multiplication.

Si l'on avait un nombre entier sans fraction à diviser par une fraction, on le mettrait sous la forme d'une fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur.

Si les fractions sont accompagnées d'entiers, on réduit ceux-ci en fractions, et l'opération est semblable aux précédentes.

Applications des fractions.

1° $3\frac{1}{2} + 7\frac{2}{3} \times 10$ font combien d'entiers?

2° $10\frac{9}{13} + 24\frac{7}{24} \times 6$ font combien d'entiers?

3° $12\frac{2}{3} + 7\frac{4}{5} + 8\frac{1}{7} \times 3 \times 9$ font combien d'entiers?

4° Quelle est la somme de $8 \times 7\frac{5}{7}$; $7 \times 10\frac{1}{2}$; $4 \times 3\frac{3}{4}$?

5° Une livre coûte 17 fr. $\frac{7}{10}$; combien coûteront

9 livres, et combien 11 livres coûteront-elles de plus que les 9 livres?

6° Un litre de vin coûte 1 fr. $\frac{3}{4}$; on en achète 15 litres. Du vin d'une autre qualité coûte 15 sous le litre, et l'on en achète 22 litres; les 22 litres coûtent-ils plus ou moins que les 15 litres?

7° Si 5 ouvriers gagnent 12 fr. par jour, combien gagneront 3 ouvriers?

8° Si 3 ouvriers font 38 toises en 5 jours, combien 5 ouvriers en feront-ils en 3 jours $\frac{3}{4}$?

9° Si 5 ouvriers font 24 toises en 4 jours et en travaillant 4 heures par jour, combien 7 ouvriers en feront-ils en 8 jours, en travaillant 2 heures par jour?

10° Si une demi-livre coûte 3 fr., que coûteront 220 livres?

11° Si $\frac{4}{5}$ de livre coûtent 2 fr., que coûteront 100 livres?

12° Si 2 livres $\frac{1}{2}$ coûtent 3 fr., que coûteront 100 livres?

13° Si une demi-livre coûte un quart de fr., que coûteront 100 livres?

14° Combien coûteront 12 livres $\frac{3}{4}$, si 7 livres coûtent 15 fr.?

15° Combien coûteront 7 aunes, si 10 aunes coûtent 8 fr. 7 sous?

16° Si pour 9 fr. on a 5 aunes, combien en aura-t-on pour 187 fr.?

17° Si une demi-livre coûte 2 fr. $\frac{1}{2}$, que coûteront 100 livres $\frac{1}{2}$?

18° Deux courriers partent en même temps; l'un fait par heure 2 lieues $\frac{3}{8}$ et court pendant 22 heures; l'autre fait par heure 2 lieues $\frac{1}{9}$ et court pendant 24 heures; lequel des deux est le plus éloigné du point de départ, et à quelle distance sont-ils l'un de l'autre?

19° Deux courriers partent en même temps d'une ville; l'un fait 1 lieue $\frac{9}{10}$ par heure et court pendant 20 heures $\frac{3}{4}$; l'autre fait 2 lieues $\frac{5}{6}$ par heure et court pendant 15 heures $\frac{3}{7}$; lequel des deux est le plus éloigné du point de départ?

20° Dans une course de chevaux on fait lutter trois chevaux que nous désignerons par les lettres A B C. Le chemin à parcourir est un demi-mille. Le cheval A le parcourt en 10 minutes $\frac{11}{15}$, le cheval B en 10 minutes $\frac{11}{13}$, et le cheval C en 10 minutes $\frac{14}{17}$; quel est le premier arrivé?

21° Dans une course de chevaux on fait lutter quatre chevaux que nous désignerons par les lettres A B C D. Le chemin à parcourir est $\frac{3}{4}$ de mille. Le cheval A peut parcourir un mille en 12 minutes $\frac{3}{5}$, le cheval B en 12 minutes $\frac{7}{9}$, le cheval C en 12 minutes $\frac{8}{12}$, et le cheval D en 12 minutes $\frac{9}{13}$; quel est le premier arrivé au but?

22° Un copiste doit écrire 56 pages $\frac{3}{5}$. Il fait par heure 4 pages $\frac{2}{7}$ et travaille 3 heures par jour: en combien de temps aura-t-il fini?

23° Trois copistes que nous désignerons par les lettres A B C ont chacun l'ouvrage suivant, savoir: A a 48 pages $\frac{1}{2}$; il fait 3 pages $\frac{4}{5}$ par heure et travaille

2 heures $\frac{3}{4}$ par jour. B a 50 pages $\frac{5}{7}$; il fait 3 pages $\frac{1}{3}$ par heure et travaille 3 heures $\frac{3}{5}$ par jour. C a 53 pages $\frac{4}{9}$ à faire; il fait 4 pages $\frac{1}{5}$ par heure et travaille chaque jour pendant 4 heures $\frac{2}{3}$. Quel est celui qui aura le premier achevé?

24° Un père laisse en mourant une certaine somme à ses fils; l'aîné a 10000 fr.; le second a les $\frac{3}{5}$ de la part du premier, et le troisième a les $\frac{3}{4}$ de la part du second; quelle est la fortune et quelle est la part de chacun?

25° Un père laisse en mourant une certaine somme. Il donne à son fils aîné les $\frac{4}{7}$ de ce qu'il donne au second, au second les $\frac{1}{2}$ de ce qu'il donne au troisième, et au troisième les $\frac{2}{5}$ de ce qu'il donne à sa femme; il laisse à cette dernière 24000 fr.; quelle est la fortune qu'il a laissée et quelle est la part de chacun?

26° Une montagne a 1500 mètres d'élévation. Aux $\frac{4}{5}$ de sa hauteur est un châlet (*), aux $\frac{3}{4}$ de la hauteur du châlet est une autre habitation, aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur de cette habitation est un rocher, et aux $\frac{3}{7}$ de la hauteur de ce rocher est une caverne; quelle est la hauteur de chacun de ces objets?

27° Cinq personnes de différentes tailles sont à côté les unes des autres : nous les désignerons par les lettres A B C D E. Il s'agit de les placer par ordre de grandeur d'après les données suivantes : A a 6

(*) Les châlets sont des cabanes suisses où l'on fait le fromage; elles sont situées sur les montagnes. Les bergers y conduisent leurs troupeaux dans la belle saison.

pieds $\frac{1}{2}$, B a les $\frac{3}{4}$ de A, C a les $\frac{4}{5}$ de B, D a les $\frac{5}{4}$ de C, E a les $\frac{6}{5}$ de D.

Réponses et solutions.

1° 111 entiers $\frac{2}{3}$. — 2° 209 $\frac{282}{312}$. — 3° 772 $\frac{48}{105}$. — 4° 150 $\frac{3}{14}$.

5° 9 livres coûtent 159 fr. $\frac{3}{10}$; 11 livres coûtent 194 fr. $\frac{7}{10}$. La différence est 35 fr. $\frac{4}{10}$ (*).

6° Les 15 litres coûtent 26 fr. $\frac{1}{4}$; les 22 litres coûtent 16 fr. $\frac{1}{2}$. Il y a une différence de 9 fr. $\frac{3}{4}$.

7° Un ouvrier gagnera la cinquième partie de 12 fr. ou 2 fr. $\frac{2}{5}$, et 3 ouvriers gagneront 3 fois autant ou 7 fr. $\frac{1}{5}$.

8° Un ouvrier fait 12 toises $\frac{2}{3}$ en 5 jours. En 1 jour il fait la cinquième partie ou 2 toises $\frac{8}{15}$. Pour savoir combien il en fera en 3 jours $\frac{3}{4}$, il faut multiplier 2 $\frac{8}{15}$ par 3 $\frac{1}{4}$, ce qui donne $\frac{570}{60}$ ou $\frac{57}{6}$ ou 9 toises $\frac{1}{2}$. 5 ouvriers en feront 5 fois autant ou 47 toises $\frac{1}{2}$.

9° Un ouvrier fait 4 toises $\frac{4}{5}$ en 4 jours; en 1 jour il fait 1 toise $\frac{1}{5}$, et en 1 heure $\frac{6}{20}$ ou $\frac{3}{10}$ de toise. 7 ouvriers feront 2 toises $\frac{1}{10}$, en 8 jours 16 toises $\frac{8}{10}$ ou $\frac{4}{5}$, et en travaillant 2 heures par jour ils feront 33 toises $\frac{3}{5}$.

(*) Les parties de francs qui sont exprimées ici en fractions pourront être changées approximativement en subdivisions ordinaires à la fin de chaque problème. J'ai exprimé ces subdivisions en fractions, parce que l'élève ne connaît pas encore le calcul des nombres complexes, et en même temps pour servir d'exercices sur les fractions.

10° Si une demi-livre coûte 3 fr., une livre coûtera 6 fr, et 220 livres coûteront $220 \times 6 = 1320$ fr.

11° Si $\frac{4}{5}$ de livre coûtent 2 fr., $\frac{1}{5}$ coûtera un demi-franc, et 1 livre coûtera 5 fois autant ou 2 fr. $\frac{1}{2}$; 100 livres coûteront 100 fois autant ou 250 fr.

12° Autant de fois 2 liv. $\frac{1}{2}$ sont contenues dans 100 livres, autant on aura de fois 3 fr. Les 100 livres coûteront 120 fr.

13° 50 fr.

14° Une livre coûtera la septième partie de 15 fr. ou 2 fr. $\frac{1}{7}$, et 12 livres $\frac{3}{4}$ coûteront 2 fr. $\frac{1}{7} \times 12$ fr. $\frac{3}{4}$ $= 27$ fr. $\frac{9}{28}$.

15° Si 10 aunes coûtent 8 fr. 7 sous, ou ce qui est la même chose, 167 sous, 1 aune en coûtera la dixième partie ou 16 sous $\frac{7}{10}$, et 7 aunes coûteront 7 fois autant ou 116 sous $\frac{9}{10}$ ou 5 fr. 16 sous $\frac{9}{10}$.

16° Si 5 aunes coûtent 9 fr., 1 aune coûtera 1 fr. $\frac{4}{9}$, et autant de fois 1 fr. $\frac{4}{9}$ sont contenus de fois dans 187 fr., autant on peut avoir d'aunes pour ce prix. On trouve 129 aunes $\frac{6}{13}$.

17° 502 fr. $\frac{1}{2}$.

18° Le premier a fait 52 lieues $\frac{1}{4}$, et le second 53 lieues $\frac{1}{3}$; ils sont éloignés l'un de l'autre de 1 lieue $\frac{1}{12}$.

19° Le premier a fait 39 lieues $\frac{17}{40}$, et le second 43 lieues $\frac{5}{7}$.

20° Le cheval C arrivera le premier, B le second, et A le dernier. Il suffit de comparer les fractions des minutes, puisque le nombre de ces dernières est égal pour chacun.

21° B le premier, C le second, A le troisième, et D le quatrième. Le nombre des minutes étant égal pour tous, il suffit de comparer les fractions. Il est inutile de chercher le temps que chaque chéval mettra à parcourir trois quarts de mille, car il est certain que celui qui aura le plus vite parcouru un mille en aura plus tôt parcouru les trois quarts.

22° Il aura achevé en 4 jours $\frac{181}{450}$ ou 4 jours 1 heure et environ $\frac{1}{5}$.

23° Le copiste C a fini le premier, B le second, et A le dernier.

Après avoir trouvé combien chaque copiste fait de pages par jour, il faut diviser le nombre de pages à faire par le nombre de pages faites en 1 jour, ce qui donne pour A 4 jours $\frac{67}{112}$, pour B 4 jours $\frac{157}{251}$, et pour C 2 jours $\frac{16}{147}$.

24° L'aîné a 10000 fr., le second 6000, et le troisième 4500; ensemble 20500. fr.

25° L'aîné a 19200 fr., le second 14400 fr., le troisième 9600 fr., et la femme 24000 fr.; ensemble 67200 fr.

26° Le châlet est à 1200 mètres, l'habitation à 900 mètres, le rocher à 600 mètres, et la caverne à 257 mètres $\frac{1}{7}$.

27° A a 6 pieds $\frac{1}{7}$, E a 5 pieds $\frac{17}{20}$, B et D ont 4 pieds $\frac{1}{2}$, et C a trois pieds $\frac{9}{10}$.

Questions théoriques sur les fractions.

Notions préliminaires.

(89) 1° Que veut dire *fraction*?

2° Quelle différence y a-t-il entre une *fraction* et un *nombre fractionnaire*?

3° Comment exprime-t-on les fractions?

4° Comment appelle-t-on le nombre qui indique la quantité de parties contenues dans l'entier?

5° Comment appelle-t-on le nombre qui indique la quantité de parties dont la fraction se compose?

6° Quel nom commun donne-t-on au numérateur et au dénominateur?

7° Quel changement s'opère-t-il dans une fraction quand on augmente le dénominateur? — Même question quand on le diminue. — Pourquoi?

8° Quel changement s'opère-t-il dans une fraction quand on augmente le numérateur? — Même question quand on le diminue. — Pourquoi?

9° D'après cela, quel est le moyen de prendre la moitié ou le tiers d'une fraction?

10° Quel est le moyen de doubler ou tripler, etc. une fraction?

11° Qu'y a-t-il à remarquer sur une fraction lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise les deux termes par le même nombre? — Pourquoi?

12° Une fraction peut-elle être exprimée de différentes manières sans changer de valeur?

13° Quand une fraction est exprimée par de grands nombres, quel est le moyen de diminuer ses termes sans changer sa valeur?

14° Comment appelle-t-on le plus grand nombre qui divise exactement les deux termes?

15° Quel est le moyen de le trouver? (Le plus grand commun diviseur.)

16° Comment appelle-t-on l'opération par laquelle on exprime une fraction de la manière la plus simple?

Addition et réduction au même dénominateur

17° Les fractions sont-elles susceptibles d'addition ainsi que les nombres entiers?

18° Quelle condition essentielle y a-t-il à observer pour l'addition des fractions?

19° Comment réduit-on des fractions au même dénominateur?

20° Expliquez comment il se fait que par l'opération de la réduction au même dénominateur, les fractions ne changent pas de valeur, et comment elles se trouvent avoir le même dénominateur?

21° Additionnez $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$.

22° Peut-on quelquefois se dispenser de faire l'opération que l'on vient d'indiquer, et les réduire d'une manière plus abrégée? Par exemple : $\frac{3}{8}$, $\frac{13}{24}$, $\frac{1}{2}$.

Soustraction.

23° D'un coupon de drap de 7 aunes $\frac{7}{8}$ on emploie 2 aunes $\frac{1}{8}$; combien reste-t-il?

24° Comment se fait la soustraction des fractions?

25° Comment soustrait-on des fractions dont les dénominateurs sont différents?

26° Soustrayez 3 $\frac{7}{8}$ de 7 $\frac{1}{8}$.

Multiplication.

27° Comment multiplie-t-on une fraction par un nombre entier?

28° Qu'y a-t-il à remarquer sur le produit d'une quantité multipliée par une fraction?

29° Quelle différence y a-t-il entre la multiplication par un nombre entier et la multiplication par une fraction?

30° Quelle définition peut-on donner de la multiplication qui convient également à celle des entiers et à celle des fractions?

31° Si une toise coûte 5 fr., combien coûteront 4 toises $\frac{1}{3}$?

32° Comment multiplie-t-on une fraction par une autre fraction?

33° Expliquez la raison de cette opération sur cette question : Un ouvrier fait $\frac{3}{4}$ de toises en une heure; combien en fera-t-il pendant $\frac{3}{4}$ d'heure?

34° Comment multiplie-t-on deux fractions accompagnées chacune de nombres entiers?

35° Si un ouvrier fait en 1 jour (12 heures), 7 mètres $\frac{7}{10}$, combien en fera-t-il en 5 heures? *R.* $7\ \frac{7}{10} \times \frac{5}{12}$.

36° Comment multiplie-t-on un nombre entier par une fraction? Par exemple $7 \times \frac{1}{8}$?

37° Quels sont les $\frac{3}{5}$ des $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{2}$?

38° Comment appelle-t-on une suite de fractions considérées comme facteurs?

Division.

39° Quel est le but de la division des fractions?

40° Comment trouve-t-on le quotient d'une fraction divisée par une autre fraction?

Expliquez la raison de cette opération.

Quel moyen emploie-t-on pour rendre cette opération plus claire?

41° Comment divise-t-on un nombre fractionnaire par un autre nombre fractionnaire?

42° Comment divise-t-on un nombre entier seul par une fraction?

43° Combien 3 $\frac{4}{5}$ sont-ils contenus de fois dans 8 $\frac{1}{2}$?

44° Combien 5 $\frac{7}{8}$ sont-ils contenus de fois dans 11 entiers?

Réponses aux questions précédentes.

1° Le mot fraction signifie partie d'un tout.

2° Une fraction est plus petite qu'un entier, tandis qu'un nombre fractionnaire contient des entiers et des fractions.

3° On exprime une fraction par deux nombres dont l'un indique en combien de parties l'unité est divisée, et l'autre combien la fraction contient de ces parties.

4° Dénominateur. — 5° Numérateur. — 6° Termes.

7° Quand on augmente le dénominateur, la fraction diminue, parce que le nombre des parties contenues dans l'entier étant plus grand, ces parties sont plus petites. Quand on le diminue, la fraction augmente par la raison inverse.

8° Quand on augmente le numérateur, la fraction augmente, parce qu'on prend un plus grand nombre de parties contenues dans l'unité. Quand on le diminue, la fraction diminue par la raison inverse.

9° On prend la moitié d'une fraction en divisant le numérateur par 2, ou en multipliant le dénominateur par 2. On en prend le tiers ou le quart en faisant la même opération par 3 ou par 4.

10° On double une fraction en multipliant le numérateur par 2, ou en divisant le dénominateur par 2. On la triple ou quadruple en faisant la même opération avec 3 ou 4.

11° Elle ne change pas de valeur, parce qu'en multipliant le numérateur on l'augmente, et en multipliant le dénominateur on la diminue de la même quantité dont on l'avait augmentée. Donc puisqu'on ôte d'un côté ce que l'on avait ajouté d'un autre, elle doit avoir conservé sa valeur.

Le même résultat a lieu lorsqu'on divise les termes par le même nombre, mais d'une manière inverse.

12° Oui.

13° C'est de diviser les deux termes par un même nombre, et pour que la fraction soit exprimée de la manière la plus simple, il faut trouver le plus grand nombre qui divise exactement les deux termes.

14° Le plus grand commun diviseur.

15° On trouve le plus grand commun diviseur en divisant le plus grand terme par le plus petit, celui-ci par le reste, ce reste par le second reste, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve un reste qui divise exactement; c'est alors le plus grand commun diviseur. Si à la fin de l'opération on trouve l'unité pour reste, la fraction est irréductible.

16° Réduction d'une fraction à sa plus simple expression.

17° Oui.

18° Elles doivent avoir le même dénominateur.

19° On réduit deux fractions au même dénominateur en multipliant les deux termes de chacune par le dénominateur de l'autre. S'il y a plus de deux fractions, on considère tous les dénominateurs comme n'en faisant qu'un seul en les multipliant.

20° Les fractions n'ont pas changé de valeur, parce que les deux termes ont été multipliés par le même nombre. Elles ont le même dénominateur, parce qu'ils ont été multipliés l'un par l'autre.

21° 1 $\frac{29}{30}$.

22° On peut se dispenser de faire cette opération dans certains cas; par exemple : $\frac{3}{8}$, $\frac{13}{24}$, $\frac{1}{2}$, parce qu'on voit que les tiers et les demies peuvent se changer en vingt-quatrièmes.

23° 5 aunes $\frac{4}{8}$.

24° On soustrait une fraction d'une autre en soustrayant le numérateur du numérateur.

25° Il faut premièrement les réduire au même dénominateur.

26° 3 $\frac{2}{8}$.

27° En multipliant le numérateur par le nombre entier.

28° Le produit provenant de la multiplication par une fraction est plus petit que le multiplicande.

29° Dans la multiplication par un nombre entier on répète un nombre plusieurs fois, tandis que dans la multiplication par une fraction on le divise.

30° La multiplication est une opération dont le produit est au multiplicande ce que le multiplicateur est à l'unité.

31° 23 fr. $\frac{1}{3}$.

32° En multipliant numérateur par numérateur et dénominateur par dénominateur.

33° Si en une heure il fait $\frac{3}{4}$ de toise, en trois quarts-d'heure il en fera les trois quarts ; il faut donc prendre les trois quarts de trois quarts ou en prendre le quart et le répéter trois fois, ou enfin multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{3}{4}$. En multipliant le dénominateur par 4, on en prend le quart, et en multipliant le numérateur par 3, on le répète trois fois.

34° On fait disparaître les entiers en les réduisant en fractions, et l'opération se fait d'après la règle ordinaire.

35° $7\frac{7}{10} \times \frac{5}{12} = 3\frac{5}{24}$.

36° Il faut multiplier le numérateur de la fraction par le nombre entier, ou ce qui revient au même, on met le nombre entier sous la forme d'une fraction en lui donnant l'unité pour dénominateur, et l'opération se fait comme celle de deux fractions.

37° $\frac{9}{40}$.

38° Fractions de fractions.

39° Le but de la division des fractions est de voir combien une fraction est contenue de fois dans un dividende quelconque.

40° En multipliant le numérateur de la fraction dividende par le dénominateur de la fraction diviseur et le dénominateur de la fraction dividende par le numérateur de la fraction diviseur. Pour l'explication de cette opération, voyez n° (86).

On la rend plus claire en renversant les termes de la fraction dividende, et l'opération se fait comme dans la multiplication.

41° On réduit les entiers en fractions, et l'opération se fait comme à l'ordinaire.

42° On met le nombre entier sous la forme d'une fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur.

43° $\frac{85}{38}$ ou 2 fois $\frac{9}{38}$ de fois.

44° $\frac{88}{47}$ ou 1 fois et $\frac{41}{47}$ de fois.

§ VII.

FRACTIONS DÉCIMALES.

Exercices préparatoires.

(90) — Si l'on partage une unité en 10 parties égales, et chaque dixième en 10 autres parties égales, combien l'unité contiendra-t-elle de parties? *R.* 100.

— Si chaque centième est encore divisé en 10 parties, combien l'entier en contiendra-t-il? *R.* 1000.

— Combien 1 dixième contient-il de centièmes?

— Combien 1 centième contient-il de millièmes?

— Combien 1 centième contient-il de dix-millièmes?

— Combien 1 dixième contient-il de millièmes?

— Combien 2 dixièmes font-ils de centièmes?

— Combien 3 dixièmes plus 4 centièmes font-ils de millièmes?

R. 1 dixième contient 100 millièmes, 3 dixièmes en contiendront 300; 1 centième contient 10 millièmes, et 4 centièmes en contiendront 40 : ensemble 340.

— Combien 5 dixièmes 5 centièmes 8 millièmes font-ils de millièmes?

— Combien 8 entiers 7 millièmes font-ils de millièmes?

— Combien 5 entiers 9 centièmes font-ils de millièmes?

— Combien 3 entiers 4 dixièmes 8 millièmes font-ils de dix-millièmes?

Il est important de se familiariser avec ces sortes de questions, c'est pourquoi j'engage à s'y appliquer. Elles ne présenteront aucune difficulté si l'on se sert d'une ligne partagée en dix parties, chaque dixième en dix centièmes, et chaque centième en dix millièmes. Pour plus de facilité, il faut que les divisions qui indiquent les dixièmes soient plus sensibles que celles qui indiquent les centièmes, etc.

(91) i h g f a b c d e
I I I I I I I I I

On sait, d'après le système de numération (3), que la valeur des chiffres diminue de dix en dix à mesure qu'ils avancent d'un rang vers la droite. Or, en suivant la même progression et en conservant à l'unité sa valeur, le chiffre 1 placé à la droite de l'unité aurait une valeur dix fois moindre et vaudrait un dixième. Ce serait une fraction. Telle est en effet la valeur du chiffre ci-dessus désigné par la lettre *b*. Celui qui est désigné par la lettre *c* vaut dix fois moins qu'un dixième, c'est-à-dire un centième. Le chiffre *d* vaut un millième, et le chiffre *e* un dix-millième.

On voit donc qu'on peut écrire un dixième, un centième, etc., de deux manières, soit sous la forme de fractions ordinaires, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, soit en mettant 1 à la droite de l'unité, en ayant soin de séparer par une virgule ou par un point les entiers des fractions.

Si l'on voulait écrire *un dixième* sans entiers, on écrirait ainsi : 0,1.

Un centième : 0,01.

Un millième, 0,001, etc.

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dixièmes s'écrivent : 0,2 ; 0,3 ; 0,4 ; 0,5 ; 0,6 ; 0,7 ; 0,8 ; 0,9.

On s'exercera sur le tableau suivant à trouver la valeur des chiffres pris séparément et au hasard. La colonne des unités est celle du milieu.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

(92) Enoncez les nombres suivants :

3,4 ; 50,08 ; 35,005 ; 29,0004 ; 12,11 ; 7,21 ; 3,00031 ; 0,3478 ; 34,348 ; 0,034 ; 0,0306.

Le nombre 12,11 peut être énoncé de deux manières, soit en disant : 12 entiers 1 dixième et 1 centième, ou si l'on fait attention qu'un dixième vaut 10 centièmes, on verra qu'on peut dire de suite 11 centièmes.

Par la même raison on peut énoncer à la fois tous les chiffres décimaux du nombre 34,348, et dire 34 entiers 348 millièmes; car 3 dixièmes = 300 millièmes; 4 centièmes = 40 millièmes : donc 300 millièmes + 40 millièmes + 8 millièmes font 348 millièmes. En général on énonce toutes les fractions qui suivent l'unité comme si c'étaient des unités simples, en ajoutant le nom qui exprime la valeur de la dernière colonne à droite.

(93) On voit qu'il est deux manières de représenter les fractions; mais par le moyen que nous venons d'indiquer, on ne peut en écrire qu'un certain nombre. (Il est bon que l'élève cherche lui-même les fractions que l'on peut écrire de cette manière.) Ce sont celles qui ont pour dénominateur 10, 100, 1000, 10000, etc., et qu'on nomme pour cette raison *décimales*.

Il faut remarquer que dans les fractions décimales on n'écrit que le numérateur, le dénominateur étant indiqué par le nombre de colonnes employées à la droite de l'unité.

Observation. On exercera l'élève à énoncer et à écrire sous la dictée toutes sortes de fractions décimales. Il est bon aussi de faire écrire la même fraction sous les deux formes.

Propriétés des décimales.

(94) *Quest.* Quel changement s'opère-t-il dans la fraction 0,1 quand on y ajoute un zéro? 0,10.

Rép. Elle n'a pas changé de valeur. D'abord il est évident que 10 centièmes sont la même chose que 1 dixième. Mais supposons que cette fraction soit écrite sous la forme ordinaire $\frac{1}{10}$, pour en faire des centièmes il faudra ajouter un zéro à chaque terme, et l'on aura $\frac{10}{100}$, fraction égale à $\frac{1}{10}$ et à 0,1.

On voit qu'en ajoutant un zéro à la droite d'une fraction décimale, on multiplie par la même quantité les deux termes qui se trouvent réunis en un seul nombre. Par conséquent elle n'a pas changé de valeur.

$$0{,}3 = 0{,}30 \quad 0{,}24 = 0{,}240 \quad 0{,}005 = 0{,}0050$$

Il est facile de comprendre, d'après cela, qu'on peut ajouter un nombre quelconque de zéros à la droite d'une fraction décimale sans qu'elle change de valeur; car si l'on en ajoute deux, les deux termes sont multipliés par 100; si l'on en ajoute trois, ils sont multipliés par 1000, etc. Il ne faut point perdre de vue que les deux termes se trouvent réunis en un seul nombre. Ainsi 0,90 = 0,900 = 0,9000 = 0,90000, etc.

Quest. Quel changement s'opère-t-il dans la fraction 0,80 par la suppression du zéro? 0,8.

Rép. Si en ajoutant des zéros à la fin d'une décimale, elle ne change pas de valeur, parce qu'on multiplie à la fois et par le même nombre les deux termes réunis en un seul; de même, en retranchant un ou plusieurs zéros de la droite d'une décimale, on divise par le même nombre le numérateur et le dénominateur. Ainsi sa valeur n'a pas changé.

On peut donc ajouter un nombre quelconque de zéros à la droite d'une fraction décimale, ou en retrancher, sans altérer sa valeur. On la simplifie en en retranchant.

Quest. Peut-on de même ajouter des zéros à la gauche d'une fraction décimale (toujours à droite de la virgule) sans changer sa valeur? Par exemple, au lieu de 0,33 peut-on mettre 0,0033?

Rép. Non, parce qu'alors les chiffres décimaux ne conservant plus leurs rangs, n'ont plus la même valeur.

Quest. Comment peut-on réduire au même dénominateur les fractions suivantes: 6,8; 3,24; 8,034?

Rép. En leur faisant occuper le même nombre de colonnes, ce qui se fait en ajoutant des zéros à la droite. Ainsi on aura 6,800, 3,240, 8,034.

Question. Quel changement a éprouvé le nombre 348,265 en reculant la virgule d'un rang sur la gauche, 34,8265?

Rép. Le chiffre 3 valait 300, il ne vaut plus que 30; sa valeur est dix fois moindre. Le 4 valait 40, il ne vaut plus que 4 unités. Le 8 valait 8 unités, il ne vaut plus que 8 dixièmes. Toutes les parties du nombre sont devenues dix fois plus petites; on en conclut que tout le nombre est devenu dix fois plus petit ou a été divisé par 10.

Par un raisonnement semblable on démontre qu'on le divise par 100 ou 1000 en reculant la virgule de deux ou trois places. Si on la reculait à droite, le nombre augmenterait dans la même proportion. En comparant la valeur de chacun des chiffres de ces nombres, on verra qu'elle devient de dix en dix fois plus forte à mesure qu'on avance la virgule d'une place sur la droite.

348,265 3482,65 34826,5

§ VIII.

APPLICATIONS DES FRACTIONS DÉCIMALES AUX POIDS ET MESURES.

Exposition succincte des anciennes mesures.

(95) Mesures de longueur. La *perche* vaut 3 toises; la *toise* vaut 6 pieds; le *pied* vaut 12 pouces; le *pouce* vaut 12 lignes.

La *lieue* terrestre de 25 au degré est de 2282 toises; la lieue de poste de 2000 toises, et la lieue marine de 20 au degré de 2854 toises.

L'*aune* se divise en demies, tiers, quarts, etc. Elle équivaut à 3 pieds 8 pouces.

La *brasse* vaut environ 6 pieds.

Mesures de poids. La *livre* pèse 2 marcs ou 14, 15, 16, 17, 18 onces; le *marc* pèse 8 onces; l'*once* pèse 8 gros ; le *gros* ou *dragme* 72 grains ; le *grain* est environ le poids d'un grain de blé.

Le *scrupule* pèse 24 grains ; l'*obole* en pèse 12.

Le *karat* vaut 4 grains ; il sert à peser l'or , l'argent et les diamans.

Le *quintal* pèse 100 livres.

Le *tonneau*, poids marin pour la charge des vaisseaux , pèse 2000 livres.

On distingue la livre *poids de marc* des autres livres ; elle pèse 16 onces : c'est celle de Paris.

Mesures de capacité. Pour les liquides. La *pinte* ou *bouteille* contient 2 chopines ; la *chopine* 2 demi-setiers ; le *demi-setier* 2 poissons.

Le *pot* en usage dans certaines provinces contient 2 pintes.

Le *setier* contient 8 pintes.

Le *muid* contient 36 setiers ou 288 pintes ; le *demi-muid* ou *feuillette* contient 18 setiers ou 144 pintes.

La *barrique* contient 26 setiers et 1 quart ou 210 pintes.

Pour les grains et autres matières sèches , telles que les légumes , les châtaignes , les noix , etc.

Le *boisseau* (de Paris) a 8 pouces 2 lignes de haut sur 10 de diamètre.

Le *demi-boisseau* a 6 pouces et demi de haut et 8 pouces de diamètre.

Le *quart de boisseau* a 4 pouces 9 lignes de haut sur 6 pouces 9 lignes de diamètre.

Le *litron* a 3 pouces 6 lignes de haut et 3 pouces 10 lignes de diamètre.

Le *muid* contient 144 boisseaux; le *setier* 12 boisseaux; la *mine* 6 boisseaux, et le *minot* 3 boisseaux.

MESURES AGRAIRES OU DE SUPERFICIE. L'*arpent*, surface de 100 perches carrées. La perche, comme nous l'avons vu plus haut, a 18 pieds de longueur, et quelquefois 22.

Les petites surfaces se mesurent à la toise ou au pied, pouce carré.

MESURES DE SOLIDITÉ. Pour le bois. On se sert à Paris de la *voie*, qui a 4 pieds de haut sur 4 de large. La *corde* est le double de la voie. Du reste, chaque province avait sa mesure particulière.

Les autres solides se mesurent à la toise ou au pied, pouce cube; c'est-à-dire qu'on prenait pour unité ou terme de comparaison un volume quelconque de la forme d'un dé à jouer, et qui avait une toise ou un pied dans tous les sens.

Nouvelles mesures.

(96) Nous nous sommes borné, pour les anciennes mesures, aux principales; car il aurait fallu presqu'un volume pour les développer toutes. On en compte environ 900 en France seulement. A cette variété immense de mesures se joignait l'inconvénient de n'avoir point d'uniformité dans leurs divisions, ce qui en rendait les calculs très-longs et très-difficiles; inconvénient fort grave dans le commerce, et dont pouvaient profiter aisément les gens de mauvaise foi. En outre leur valeur n'étant fondée que sur une convention arbitraire, elles pouvaient insensiblement s'altérer sans

qu'on pût avoir de type certain pour les rétablir ; de là, par exemple, la variété dans la longueur de l'aune, qui est beaucoup plus longue dans certaines villes que dans d'autres, et en général il en est de même pour toutes les mesures. Il était donc à désirer d'avoir les mêmes mesures pour toute la France ; mesures qui doivent avoir pour principales qualités d'être uniformes dans leurs divisions et inaltérables dans leurs dimensions. Philippe V avait eu le projet de cette réforme, mais sa mort l'empêcha de l'exécuter, et malgré les inconvéniens qui résultaient du système ordinaire, elle n'eut lieu qu'au temps de la république française, où l'académie des sciences fut chargée de déterminer une mesure fondamentale et invariable.

Cette mesure est le *mètre* (*), qui équivaut à 3 pieds 11 lignes $\frac{1}{2}$. Il se partage en 10 parties; chaque dixième en 10 centièmes, chaque centième en 10 millièmes, etc., etc. Ces subdivisions, ainsi que celles des autres mesures, sont infinies, puisque rien n'empêche d'aller jusqu'aux millionièmes, et même au delà, si l'on en avait besoin, avantage que l'on n'a pas avec les anciennes mesures. Le mètre devant être invariable, on a dû le chercher dans quelque chose qui ne fût sujet à aucun changement. La base fondamentale du mètre a été le quart du méridien terrestre ou la distance du pôle à l'équateur, que l'on a partagée en

---

(*) *Mètre* vient d'un mot grec qui veut dire *mesure*.

dix millions de parties, ce qui a donné le mètre. Il remplace toutes les mesures de longueur.

Toutes les autres mesures sont formées du mètre de la manière suivante :

MESURES DE CAPACITÉ. Le *litre;* c'est le décimètre ou dixième partie du mètre cube ; c'est-à-dire que si l'on a un vase de forme cubique ayant un décimètre dans tous les sens, on aura la capacité d'un litre. Il se divise également de dix en dix comme le mètre. Les mesures plus fortes que le litre sont les dizaines, les centaines, etc. de litres.

MESURES DE POIDS. Le *gramme;* c'est le poids d'un centimètre cube d'eau distillée à la température de zéro ; c'est-à-dire que si l'on a un petit vase de forme cubique ayant un centième de mètre dans tous les sens, et si l'on remplit ce vase d'eau distillée, le poids de cette eau est celui du gramme. Nous verrons tout à l'heure pourquoi l'on a choisi la température de zéro. Le gramme pèse environ 19 grains de l'ancien poids. Il se subdivise de dix en dix, et les mesures plus fortes se font aussi par dizaines, centaines, mille, etc.

MESURES DE SUPERFICIE. L'*are* pour les champs ; c'est un carré dont les côtés ont 10 mètres, ce qui fait en tout 100 mètres carrés. Ses subdivisions sont les mêmes que celles des mesures précédentes.

MESURES DE SOLIDITÉ. Le *stère* pour le bois de chauffage ; c'est un mètre cube. Ses subdivisions sont analogues aux précédentes. Ce terme n'est d'usage que pour le bois à brûler. Pour les autres objets, on dit simplement, *mètre cube* ou dixième, centième, etc. de mètre de cube.

Monnaies. Le *franc*. Il pèse 5 grammes et a un dixième de son poids en alliage, ce que l'on entend par cette expression qu'il est au titre de $\frac{9}{10}$. Sa dixième partie s'appelle *décime*, et sa centième partie *centime*.

Toutes ces mesures étant formées d'une seule qui est invariable, doivent l'être également; mais pour assurer leur stabilité d'une manière plus sûre, on a pris les précautions que nous allons indiquer.

La température influant sur la dimension des corps, on a choisi le terme de zéro pour la confection des modèles du mètre déposés à l'Observatoire royal.

Pour le gramme on a choisi de l'eau distillée, afin qu'étant plus pure et déchargée en grande partie de matières étrangères, elle eût un poids plus déterminé que l'eau ordinaire. La température influant de même sur le poids d'un volume déterminé d'eau, on a fixé celle à laquelle doit se faire l'expérience, c'est le terme de zéro ou de la glace fondante. Enfin l'air plus ou moins épais ou plus ou moins surchargé d'humidité fait varier le poids des corps; c'est pourquoi les modèles représentent le poids du gramme dans le vide.

Les autres mesures se trouvent naturellement déterminées par celles-ci.

Au moyen de ces données on pourra toujours, dans tous les temps, retrouver ces mesures avec autant de précision qu'on les a maintenant, si l'on venait à en perdre les modèles.

(97) Nous avons vu qu'on avait adopté pour les

nouvelles mesures une division uniforme, savoir, de dix en dix. Ces divisions étant de véritables fractions décimales, peuvent s'écrire sous la forme de ces dernières, c'est-à-dire que pour écrire 1 mètre et 1 dixième de mètre on écrira : $1^{m},1$.

2 mètres 8 dixièmes s'écrivent : $2^{m.},8$.

10 mètres 4 centièmes s'écrivent : $10^{m.},04$.

7 litres 1 dixième et 2 centièmes s'écrivent : $7^{lit.},12$.

$12^{gr},24$ s'énonce : 12 grammes 2 dixièmes 4 centièmes ou 24 centièmes. $8^{m},253$ s'énonce : 8 mètres 2 dixièmes 5 centièmes 3 millièmes ou 253 millièmes.

On a donné des noms à chacune de ces divisions de l'unité principale ; mais ces noms indiquent toujours la valeur de la fraction et l'unité dont elle dérive. C'est le nom même de cette unité auquel on a ajouté les mots, *déci* pour dixième, *centi* pour centième, *milli* pour millième.

On dira donc : un décimètre, un décilitre, un décigramme, un décistère, un déciare ; un centimètre, un centilitre, un centigramme, etc.

$33^{m.},254$ s'énoncera, 33 mètres 2 décimètres 5 centimètres 4 millimètres, ou mieux 33 mètres 254 millimètres.

$435^{gr},25$ s'énoncera, 435 grammes 25 centigramm.

Observation. Il faut beaucoup exercer l'élève sur la dictée et sur l'énoncé de ces nombres, et surtout il faut l'habituer à distinguer au premier coup d'œil la valeur du dernier chiffre décimal à droite.

*

(98) On voit avec quelle facilité on réduit toutes les divisions de l'unité à une même expression, chose qui ne peut pas se faire de cette manière avec les anciennes mesures; car si l'on veut exprimer en unités de la plus petite espèce, 4 livres 7 onces 4 gros 54 grains, il faut faire trois multiplications et autant d'additions. Si au contraire on veut énoncer 234 grammes 3 décigrammes 4 centigrammes 8 milligrammes, on dira, 234 grammes 348 milligrammes.

(99) Un des avantages des noms appliqués aux subdivisions des nouvelles unités est, comme nous l'avons dit, d'exprimer à la fois le nom de la mesure principale et la valeur de cette subdivision. Dans *milliare*, par exemple, on voit que cette mesure dépend de *l'are* et le mot *milli* indique qu'elle en est la millième partie. Qui est-ce qui pourrait reconnaître au seul nom de *grain* une division de la livre et qu'il en faut 9216 pour équivaloir à ce poids?

(100) Comme on pouvait avoir une grande quantité d'unités à énoncer, on en a fait des collections de dix, cent, mille, dix mille, etc., auxquelles on a donné les noms de *déca* pour dizaine, *hecto* pour centaine, *kilo* pour mille, et *myria* pour dizaine de mille (*). On dira donc : un *décamètre*, un *décalitre*, etc., un *hectomètre*, un *hectogramme*, etc., un *kilomètre*, un *kilogramme*, etc.

(*) Ces noms dérivent du grec.

(101) Récapitulation des noms de la nouvelle nomenclature.

Myria	mètre (*).	gram.	lit.	stère	are,	franc.
Kilo	»	(**)	«	»	kilare (***)	
Hecto	»	»	»	»	hectare.	
Déca	»	»	»	»	décare.	
Unité						
Déci	»	»	»	»	»	décime.
Centi	»	»	»	»	»	centime.
Milli	»	»	»	»	»	

Tout le système des nouveaux poids et mesures se réduit donc à treize noms principaux et à une seule division pour toutes les mesures, qui est la division décimale.

34567gr.,45 peut donc s'énoncer ainsi : 3 myriagrammes 4 kilogrammes 5 hectogrammes 6 décagrammes 7 grammes 45 centigrammes, ou mieux 34567 grammes 45 centigrammes. En général on ne se sert des expressions déca, hecto, kilo et myria que lorsqu'il s'agit d'un nombre rond de dizaines, centaines, etc. ; ainsi ce nombre 54000 grammes s'énonce 54 kilogrammes.

Observation. On familiarisera l'élève avec ces expressions par beaucoup de dictées et en l'exerçant à trouver de suite :

(*) Le myriamètre équivaut à 2 lieues ordinaires.

(**) Le kilogramme pèse environ 2 livres.

(***) On dit kilare pour kiloare, hectare pour hectoare, décare pour décoare, afin d'éviter un hiatus.

1° Combien un certain nombre de mètres contient de kilomètres, hectomètres, etc., ce qui revient à chercher combien il contient de mille ou de centaines;

2° Combien un certain nombre de myriagrammes, par exemple, font de kilogrammes ou hectogrammes, etc.

§ IX.

OPÉRATIONS DE L'ARITHMÉTIQUE SUR LES FRACTIONS DÉCIMALES ET SUR LES NOUVELLES MESURES (XIV).

Addition des décimales et des nombres complexes.

$$\begin{array}{r} \text{m.} \\ 34{,}251 \\ 124{,}212 \\ 721{,}893 \\ \hline 880{,}356 \end{array}$$

(102) Les parties du mètre étant de véritables fractions doivent s'additionner de même, c'est-à-dire qu'on doit en ajouter les numérateurs. Il ne s'agit donc que d'additionner les nombres 251, 212, 893, pour lesquels on procède comme pour les nombres entiers. A cet effet on considère les millièmes comme des unités, les centièmes comme des dizaines (ce sont en effet des dizaines de millièmes), les dixièmes comme des centaines, les unités comme des mille, etc.; en un mot, on considère les entiers et les fractions comme ne faisant qu'un seul nombre entier que l'on additionne comme tel.

Quant à la place de la virgule dans la somme, elle est déterminée par la valeur du dernier chiffre décimal à droite. Dans l'exemple précédent, ce dernier chiffre exprime des millièmes; il faut donc, pour en extraire les entiers, le diviser par 1000, ce que l'on fait en séparant trois chiffres sur la droite.

$$\begin{array}{r} 3,4 \\ 15,25 \\ 12,053 \\ \hline 30,703 \end{array}$$

Dans cet exemple il s'agit d'ajouter des dixièmes, des centièmes et des millièmes, fractions de différentes espèces. On les réduit au même dénominateur en leur faisant occuper le même nombre de colonnes (94); mais il est facile de voir que cela n'apporte aucun changement dans le résultat, puisque les quatre dixièmes sont toujours comptés pour quatre centaines de millièmes : il est donc inutile de le faire. On aura soin de placer les unités de même ordre dans la même colonne, puis on fait l'addition comme il a été indiqué. La virgule doit toujours être placée entre les unités et les dixièmes. La preuve se fait comme celle des nombres entiers :

$$1^{\circ}\ \begin{array}{r} 23000,44 \\ 1894,234 \\ 579,009 \\ 1200,044 \\ 8,8 \\ \hline \end{array} \qquad 2^{\circ}\ \begin{array}{r} \text{m.} \\ 36,28 \\ 8,50 \\ 12,344 \\ 23,4 \\ 134,29 \\ \hline \end{array}$$

3° fr. c.
344,25
29,50
36,84
700,20
738,44

4° lit.
30,33
290,784
84,9
8,12

5° fr.
130,48
90,50
300,25
229,75
1200,90

6° Différents envois de coton à un négociant.

kil. hect.
30,5
120,3
344,8
154,»
200,9
369,7
24,»

Addition des nombres complexes.

(103) On appelle nombres *complexes* ceux qui renferment plusieurs espèces d'unités, comme 3 livres 8 onces 4 gros 54 grains. Par opposition on appelle *incomplexes* ceux qui n'en renferment qu'une seule.

Un marchand de tabac a vendu en différentes fois, savoir :

1 liv.	8 onces	4 gros
6	12	5
»	8	»
»	10	7
12	»	»
24	15	»
»	»	4
»	9	7
47	65	27
47	1	3

L'addition des nombres complexes ne peut se faire comme celle des décimales par plusieurs raisons qu'il est facile de concevoir (il est bon que l'élève trouve lui-même ces raisons).

La première est que les divisions et subdivisions de l'unité ne sont point uniformes, la seconde que celle-ci ne se subdivise point de dix en dix.

Après avoir additionné les unités de la plus petite espèce qui sont ici les gros, on reçoit 27 qu'il faut diviser par 8 pour en extraire les onces que l'on ajoutera à la colonne suivante; le reste 3 s'écrit dans la colonne des gros.

La somme des onces, en y ajoutant les 3 onces provenant de l'addition des gros, est 65 qu'il faut diviser par 16 pour en extraire les livres, ce qui donne 4 livre 1 once. Cette once s'écrit au bas de la colonne des onces, et l'on retient les 4 livres pour les ajouter à la colonne des livres, dont la somme est 47.

On procède de même pour les autres subdivisions de l'unité.

Mémoire de dépense d'une cuisinière :

Viande.	12 liv.	16 s. $\frac{3}{4}$	Sucre.	12 liv.	5 s.
Pain.	10	15 $\frac{1}{2}$	Beurre.	18	18
Fruits.	3	8	Volaille.	7	
Fromage.	4		Salade.	1	5

Un marchand de vin a vendu en différentes fois, savoir :

3 setiers	4 pintes	1 chopine.
»	3	»
5	»	»
»	»	1
»	6	1
10	5	»
24	»	»
»	3	»
»	2	1

34 toises	5 pieds	8 pouces	9 lignes.
27	4	5	10
6	3	9	7
12	»	4	5
»	»	»	11
7	1	9	4

Soustraction des décimales et des nombres complexes.

(104) Une personne devait à une autre la somme de 12748 francs 48 centimes, elle lui a remboursé 18000 francs 25 centimes; combien lui doit-elle encore?

$$\begin{array}{r} \text{fr.}\quad \text{c.} \\ 12748,48 \\ -\ 1800,25 \\ \hline 10948,23 \end{array}$$

La soustraction des décimales ne diffère en rien de celle des nombres entiers; on ôte les centièmes des centièmes, les dixièmes des dixièmes, les unités des unités, comme si le nombre entier et les décimales ne formaient qu'un seul nombre entier, en ayant soin de séparer, dans le résultat, ceux-ci des fractions :

$$\begin{array}{r} 33{,}44 \\ -\ 21{,}55 \\ \hline \end{array}$$

Dans cette dernière question les chiffres décimaux du nombre à soustraire ne pouvant pas être retranchés de 44 centièmes, on s'y prendra comme pour les nombres entiers, en considérant les centièmes comme des unités, les dixièmes comme des dizaines, les unités comme des centaines, etc. On peut faire l'opération soit par emprunts (18), soit par supposition au nombre supérieur et au nombre inférieur (17).

Un gouvernement a fait un emprunt de 12000000 et en a remboursé 7344728 fr. 60 cent.; combien doit-il encore?

$$\begin{array}{r} 12000000{,}00 \\ -\ 7344728{,}60 \\ \hline 4655271{,}40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2436{,}25 \\ -\ 148{,}75 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7000{,}344 \\ -\ 781{,}456 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 354{,}267 \\ -\ 239{,}989 \\ \hline \end{array}$$

Soustraction des nombres complexes.

(105) Un ouvrier avait à faire un ouvrage de 34 toises 5 pieds 8 pouces 7 lignes; il en a fait 12 toises 3 pieds 5 pouces 4 lignes; combien lui en reste-t-il encore à faire?

34 toises	5 pieds	8 pouces	7 lignes.
— 12	3	5	4
22	2	3	3

La soustraction des nombres complexes se fait en retranchant les différents ordres d'unités des unités qui leur correspondent. Ainsi on ôte les lignes des lignes, les pouces des pouces, etc.

50 liv.	8 onces	3 gros	54 grains.
— 19	4	1	68
31	4	1	58

Dans cette question les grains de la somme inférieure ne peuvent pas être retranchés des grains de la somme supérieure. Il faut alors supposer un gros qui vaut 72 grains, 54 plus 72 font 126 grains dont il faut retrancher 68, il reste 58 grains. Ayant supposé un gros à la somme supérieure, on en suppose de même un à la somme inférieure, on aura 2 gros à ôter de 3 gros.

Si les gros ne pouvaient pas être soustraits des unités du même ordre du nombre supérieur, on supposerait une once qui vaut 8 gros, et l'on en ajouterait de même une au nombre inférieur.

On pourrait aussi emprunter sur le nombre voisin à gauche; mais remarquez bien que ce n'est pas une dizaine que l'on emprunte. Dans le cas précédent on emprunte un gros, par conséquent il faudra ajouter 72 aux 54 grains, et les 3 gros se trouvent diminués d'une unité. Mais cette méthode rend l'opération un peu plus difficile dans certains cas. Par exemple :

	128 toises	$\overset{5}{0}$ pieds	$\overset{11}{0}$ pouces.	$\overset{12}{0}$ lignes.
—	37	4	8	9
	90	1	3	3

Ne pouvant ôter 9 lignes de o, on emprunte une toise; mais comme on n'a besoin que d'un pouce, on convertit cette toise en pieds. On en prend un que l'on réduit en pouces, et l'on pose les 5 autres pieds dans le rang des pieds. Le pied que l'on a converti en pouces en donne 12 ; on en prend un que l'on réduit en lignes, et l'on place les 11 autres pouces dans le rang des pouces. On soustrait ensuite 9 lignes de 12 lignes et il en reste 3, 8 pouces de 11 pouces il reste 3, 4 pieds de 5 pieds il reste 1, et 37 toises de 127 toises il reste 90.

	14 liv.	13 onc.
—	11	15

	129 pieds	1 p.
—	88	11

	31 pieds	6 p.	8 lig.
—	1	8	11

	14 h.	24 min.	36 sec.
—	12	59	59

	458 liv.	15 onc.	
—	279	12	7 gros.

Multiplication des fractions décimales.

(106) *Observat.* Nous avons fait marcher simultanément l'addition et la soustraction des décimales et des nombres

complexes, parce que ces deux dernières parties peuvent être facilement comprises par l'élève sans déranger beaucoup la suite de nos exercices. Cela a en outre l'avantage de mettre en parallèle le calcul des décimales et celui des nombres complexes. Mais il n'en est pas de même de la multiplication et de la division de ces derniers, qui nous écarteraient considérablement de notre sujet, vu le grand nombre d'applications qu'il faut pour familiariser l'élève avec ces opérations. C'est pourquoi nous en ferons deux parties distinctes.

— Une aune coûte 33 fr. 75 cent.; combien coûteront 14 aunes?

$$\begin{array}{r} \text{fr.} \\ 33{,}75 \\ \times \quad 14 \\ \hline 135{,}00 \\ 337{,}5 \\ \hline 472{,}50 \end{array}$$

On réduit par la pensée le nombre des francs en centimes, en considérant 33 fr. 75 c. comme ne faisant qu'un seul nombre 3375, que l'on multiplie par 14; mais le produit est 47250 centimes, dont on extrait les entiers en retranchant deux chiffres sur la droite. En général on retranche du produit autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans le multiplicande ou dans le multiplicateur, si c'est ce facteur qui a des décimales.

— Un ouvrier fait par jour $3^{m.}{,}434$; combien en fera-t-il en un mois?

$$\begin{array}{r} \text{m.} \\ 3{,}434 \\ \times \quad 30 \\ \hline 103{,}020 \end{array}$$

— Un ouvrier fait par jour $0^{m},912$; combien en fera-t-il en 8 jours?

$$\begin{array}{r} 0{,}912 \\ 8 \\ \hline 7{,}296 \end{array}$$

— On a eu pour 6 fr. 4 hectogr. 8 décagr. 5 gram. 4 décigr.; combien en aura-t-on pour 48 francs?

On pourrait résoudre cette question de deux manières : premièrement en divisant $485^{gr.},4$ par 6 pour savoir combien l'on en aura pour 1 fr., et multiplier le résultat par 48. Mais il est plus simple de multiplier 485,4 par 8, ce qui répondra à la question; le produit est 3883,2. Mais on n'aurait pas pu employer ce moyen, si au lieu de 48 fr. on avait eu par exemple 47, parce que 6 n'est pas facteur de ce nombre.

(107) — Combien coûteront $65^{lit.},4$ à 6 fr. $25^{c.}$ le litre?

$$\begin{array}{r} 65{,}4 \\ 6{,}25 \\ \hline 3270 \\ 1308 \\ 3924 \\ \hline 408{,}750 \end{array}$$

Ici les deux termes ont des décimales, on les multiplie sans avoir égard à la virgule. Quant à la place qu'elle doit occuper dans le produit, voici plusieurs observations qui conduiront à la règle qu'on doit suivre.

Si au lieu de 65$^{\text{lit.}}$,4 on avait 654 lit., il faudrait retrancher deux décimales; mais le multiplicande est dix fois plus petit que 654, il est seulement 65,4, le produit sera donc dix fois plus petit, et au lieu de le diviser par 100 on le divisera par 1000, en retranchant 3 chiffres.

Autre observation. Il s'agit de multiplier 4 dixièmes et 25 centièmes. Or, d'après un principe de la multiplication des fractions (81), des *dixièmes* multipliés par des *centièmes* donnent des *millièmes*. Le multiplicande peut être considéré comme 654 dixièmes multipliés par 625 centièmes; le produit est donc 408750 millièmes, dont on extrait les entiers en divisant par 1000.

Autre observation. Cette opération est fondée sur le même principe que celle de la multiplication des fractions ordinaires, mais elle est beaucoup plus simple. Remarquez qu'en faisant abstraction de la virgule dans les deux facteurs, on réduit les entiers en fractions, comme nous l'avons indiqué (nº 83). Ces deux facteurs sont les numérateurs que l'on multiplie l'un par l'autre; les deux dénominateurs sont 10 et 100, qu'il faut aussi multiplier l'un par l'autre, ce qui donne 1000 pour dénominateur du produit.

En appliquant le même raisonnement à plusieurs questions analogues, on remarquera que le nombre des décimales que l'on retranche du produit est égal au nombre des décimales contenues dans les deux facteurs; d'où l'on déduit le principe suivant :

Pour multiplier deux nombres décimaux, on fait l'opération comme celle des entiers, sans avoir égard à la virgule. On retranche ensuite du produit autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les deux facteurs.

$$\begin{array}{r} 344,253 \\ \times\ 12,034 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 74,004 \\ \times\ 2,05 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 190,13 \\ \times\ 20,004 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,15 \\ \times\ 0,4 \\ \hline 0,060 \end{array}$$

(108) Cette dernière opération pourrait embarrasser, attendu que le produit ne donne que deux chiffres, et que la règle prescrit d'en séparer trois; mais si l'on observe que 15 cent. multipliés par 4 dixièmes donnent 60 millièmes, on verra qu'il doit y avoir trois colonnes décimales, et par conséquent qu'il faut remplacer celle des dixièmes par un zéro. Si l'on plaçait ce zéro à la droite du nombre, on aurait 600 millièmes, ce qui serait évidemment faux.

$$\begin{array}{r} 0,12 \\ \times\ 0,04 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,26 \\ \times\ 0,9 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,0006 \\ \times\ 1,5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9,0004 \\ \times\ 3,0056 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 74300,34 \\ \times\ 360,002 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1,77 \\ \times\ 2,0034 \\ \hline \end{array}$$

Division des fractions décimales.

(109) — Une aune d'étoffe coûte $5^{fr.},34^{c.}$; combien en aura-t-on pour $42^{fr.}\ 72^{c.}$?

$$42,72 \mid 5,34 = 8$$
$$00\ 00$$

On voit que cette opération se réduit à diviser 4272 cent. par 534 cent., sans avoir égard à la virgule. Il est évident que la suppression de la virgule ne doit rien changer au quotient, car 534 cent. sont contenus dans 4272 cent. autant de fois que 534 unités dans 4272 unités. On peut donc opérer comme si c'étaient des unités simples.

— On a payé $5303^{fr.},10^{c.}$ pour $353^{m.},54^{c.}$; combien a-t-on payé le mètre ?

$$5303,10 \mid 353,54 = 15 \text{ fr.}$$
$$1767,70$$
$$0000,00$$

(110) — On a payé $1202^{fr},40^{c}$ pour $150^{m},3^{déc.}$; combien a-t-on payé le mètre ?

Remarquez ici qu'en supprimant la virgule on a d'une part 1503 dixièmes, et de l'autre 120240 centièmes. On sait (50) qu'en multipliant le dividende et le diviseur par le même nombre le quotient reste le même. Or, dans cette question on a multiplié 150 par 10 pour avoir des décimètres en supprimant la virgule, et 1202 par 100 pour avoir des centimes. Il est facile de voir que le quotient ne peut point être exact. Il faut, pour rétablir l'équilibre, ajouter un zéro aux 1503 décimètres, ce qui ne changera point la valeur du nombre, et faire la division comme à l'ordinaire. On aura donc 120240 centièmes à diviser par 15030 centièmes.

De cette observation on déduit ce principe, que lorsque dans une division de fractions décimales, le dividende et le diviseur n'ont pas le même nombre de chiffres décimaux, on les égalise en ajoutant des zéros à celui qui en a le moins, ce qui, comme on l'a vu, ne change rien à la valeur de ce nombre.

Dans cet exemple : 218,4 à diviser par 27,30, on peut ajouter un zéro au dividende ou retrancher celui du diviseur, ce qui revient au même. Ce dernier moyen est à préférer quand on le peut.

(111) L'élève pourrait se trouver embarrassé sur la valeur des chiffres du quotient. Peut-être sera-t-il tenté d'en faire des décimales ; mais en réfléchissant un peu, il verra que le quotient indiquant le nombre de fois que le dividende contient le diviseur, il doit être des entiers, à moins que ce dernier n'y soit pas contenu une seule fois. D'ailleurs c'est la nature de la question qui doit le déterminer. Il arrive aussi souvent que le diviseur n'est pas contenu un nombre exact de fois dans le dividende ; mais c'est un cas que nous examinerons tout à l'heure.

(112) Si l'on veut voir combien 2 centièmes sont contenus de fois dans 3 dixièmes, on complète les décimales du dividende, et l'on divise 0,30 par 0,02, ce qui donne 15 pour quotient.

Observation. Il est bon de faire résoudre ces sortes d'opérations par le moyen des fractions ordinaires et des fractions décimales, afin de convaincre l'élève que les résultats sont les mêmes.

Soit 44,254 à diviser par 3,4. L'opération se pose ainsi :

$$\begin{array}{r|l} 44{,}254 & 3{,}400 = 13. \\ 10{,}254 & \\ 54 & \end{array}$$

On voit que 3,400 ou 3,4 sont contenus dans 44,254 13 fois plus $\frac{54}{3400}$ de fois.

Convertir en décimales le reste d'une division.

(113) Jusqu'à présent nous avons transformé le reste d'une division en une fraction ordinaire, mais il est des cas où il est bien plus avantageux de le réduire en une fraction décimale, comme dans cet exemple : On a dépensé pendant 8 jours 18 francs ; combien cela fait-il par jour?

$$\begin{array}{r|l} 18 & 8 = 2{,}25. \\ 20 & \\ 40 & \\ 00 & \end{array}$$

Après avoir divisé 18 par 8, on trouve pour quotient 2 et pour reste 2. Au lieu d'en faire une fraction ordinaire, on y ajoute un zéro et l'on continue de diviser comme auparavant; mais remarquez que ce ne sont pas 20 unités, mais 20 dixièmes qu'il faut diviser par 8; le quotient sera donc 2 dixièmes, et le reste 4 dixièmes que l'on transforme en centièmes en y ajoutant un zéro. 8 est contenu dans 40 centièmes exactement 5 centièmes de fois, donc on a dépensé par jour 2 fr. 25 cent.

Si après avoir obtenu les centièmes la division ne s'effectue pas exactement, on transforme le reste en millièmes par le même moyen, puis en dix-millièmes, etc.

(114) — Un homme a bu pendant 7 jours 31 litres de vin; combien cela fait-il de litres par jour?

$$31 \mid 7 = 4{,}428571$$

30

20

60

40

50

10

30

On conçoit que cette division ne finira jamais, puisque nous avons obtenu pour dernier dividende partiel 30, on retrouvera toute la série de dividendes que nous avons déjà eus.

En se bornant aux $4,^{\text{lit}}428$ et négligeant le reste 4, il y a une erreur de $\frac{4}{7}$ de millièmes, erreur si peu considérable en elle-même qu'on peut la négliger sans nuire sensiblement au résultat. On sent qu'on peut pousser l'exactitude à tel degré qu'on voudra en augmentant le nombre des décimales. Par exemple, dans l'exemple précédent, nous avons été jusqu'aux millionièmes, et le reste 3 que nous avons négligé fait une erreur de $\frac{3}{7}$ de millionièmes.

Pour les francs on s'arrête ordinairement aux centimes; pour le litre, le mètre, le gramme, aux centièmes ou quelquefois aux millièmes ou dix-millièmes. Pour les calculs qui exigent une grande précision, tels que les calculs astronomiques, on porte l'exactitude beaucoup plus loin. Cependant si l'on avait à faire une addition ou une multiplication de quotients décimaux obtenus par ce moyen, on pourrait se servir d'un plus grand nombre de décimales, même dans les calculs ordinaires, parce que par l'addition ou la multiplication des moindres parties on peut obtenir des parties plus considérables qu'il est important de ne pas négliger, comme dans cette question:

S'il faut 10 mètres d'étoffe pour une tenture de 7 pieds, combien en faudra-t-il pour une tenture de 12 pieds?

$10^{m.} \mid 7 = 1^{m.},428571$ pour une tenture d'un pied.
30
20
60
40
50
10

Et pour 12 pieds $1,428571 \times 12 = 17,142852$; mais comme pour ces sortes de questions on peut se contenter d'une estimation approximative, on peut dire qu'il faut $17^{m.},14$.

Transformer une fraction ordinaire en une fraction décimale.

(115) Dans toute fraction on peut considérer le numérateur comme un nombre entier dont le dénominateur est le diviseur. En effet, $\frac{3}{5}$ par exemple, ne sont autre chose que 3 entiers divisés par 5, ce qui donne $\frac{3}{5}$. On peut encore considérer le numérateur 3 comme le reste d'une division dont 5 est le diviseur ; on procède alors à sa réduction en décimales comme on l'a indiqué dans l'article précédent. On observera de mettre au quotient un zéro pour remplacer les entiers. On se borne ordinairement à 4 chiffres décimaux si la fraction n'est pas réduite avant ce nombre.

$\frac{3}{5} = 30 \mid 5 = 0{,}6$ $\qquad$ $\frac{5}{8} = 50 \mid 8 = 0{,}625$

20

40

$\frac{3}{7} = 30 \mid 7 = 0{,}42857$ $\qquad$ $\frac{7}{15} = 70 \mid 15 = 0{,}4666$

20 $\qquad$ 100

60 $\qquad$ 100

40 $\qquad$ 100

50

1

Transformer un nombre complexe en décimales, et réciproquement des décimales en nombres complexes.

(116) Soit 6 toises 4 pieds 8 pouces à réduire en décimales de la toise.

Solution. 4 pieds 8 pouces font 56 pouces. Une toise contient 72 pouces; donc 4 pieds 8 pouces ne sont autre chose que $\frac{56}{72}$ d'une toise ; fraction que l'on réduit en décimales par le procédé connu. $6^{\text{tois.}},7777$.

$$3^{\text{liv.}}\ 6^{\text{onc.}}\ 4^{\text{gr.}}\ 24^{\text{grains}} = 3^{\text{liv.}}\ \tfrac{3768}{9216} = 3^{\text{liv.}},4088.$$

On voit donc que les nouvelles mesures n'ont pas seules des décimales, mais que toute espèce d'unités peut en avoir, ce qui dans certains cas abrége considérablement le calcul. Mais les anciennes mesures ne se subdivisant pas ordinairement de cette manière, on peut avoir les décimales d'une ancienne mesure à transformer en nombre complexe, ce qui se fait par le raisonnement suivant.

Reprenons la première question. 6 t. 4 pieds 8 p. à réduire en décimales. Puisque les parties de la toise 4 pi. 8 p. ont donné la fraction $\frac{56}{72}$, et puisqu'en divisant 56 par 72 on a reçu 0,7777, en multipliant 0,7777 par le diviseur 72, on doit recevoir le produit 56. En multipliant 0,7777 par 72, on reçoit 55,9944 ce qui n'est pas tout-à-fait exact. Mais remarquez que dans la réduction que nous avons faite des 4 pi. 8 p. en décimales, nous avons négligé un reste qui est la cause de cette erreur. Remarquez en outre qu'il s'en faut de fort peu que la fraction 0,9944 soit égale à un entier, et que c'est précisément ce qu'il manque à cette fraction pour valoir une unité qui est la valeur du reste que nous avons négl gé. Or, on peut considérer cette fraction comme valant une unité et l'ajouter aux 55, ce qui donne le numérateur précédent

56. Par ce moyen on retrouve donc la fraction ordinaire $\frac{56}{72}$ formée des parties de la toise. Par conséquent ce dénominateur 72 est formé des dénominateurs 6 et 12 de chacune des subdivisions de la toise. Si donc on divise les deux termes de cette fraction par 12, on trouvera $\frac{4}{6}$ ou 4 pieds, parce que 12 est contenu 4 fois dans 56 et 6 fois dans 72; mais il reste 8 qui sont $\frac{8}{12}$ ou 8 pouces.

Cette opération qui au premier abord semble diffuse, ne l'est point du tout lorsqu'on y est habitué. Nous allons résoudre l'opération suivante dégagée de tous les raisonnements.

Soit $0^{\text{tois.}},36786$ à réduire en divisions ordinaires.

Une toise contenant 864 lignes; les subdivisions de la toise exprimées en une fraction ordinaire auront pour dénominateur 864. $0,36786 \times 864 = 317,83104$ ou simplement 318. La fraction ordinaire est donc $\frac{318}{864}$. Divisant les deux termes par 144, produit du dénominateur des pouces et des lignes, on reçoit $\frac{2}{6}$ ou 2 pieds, et il reste $\frac{30}{144}$. Divisant les deux termes de cette nouvelle fraction par 12, on reçoit $\frac{2}{12}$ ou 2 pouces, et il reste $\frac{6}{12}$ ou 6 lignes. Donc $0^{\text{tois.}},36786 =$ 0 toise 2 pieds 2 pouces 6 lignes.

Dans les applications des fractions décimales on trouvera des exercices sur cette difficulté.

Applications des fractions décimales.

(117) 1° On a vendu en différentes fois 20 mètres d'étoffe à 5 fr. 25 cent.; 32 mètres à 10 fr. 44 cent., et

18 mètres à 12 fr. 75 cent.; pour combien a-t-on vendu?

2° Combien coûtent $25^{m.},44$ à 8 fr. 44 c. le mètre?

3° Combien coûtent 50 kilogrammes 8 hectogr. à 3 fr. 25 cent. le kilogramme?

4° On a payé 534 fr. 25 cent. pour 32 kilogr.; à combien revient le kilogramme?

5° On a vendu 25 mètres 4 décim. pour 644 fr.; à combien revient le mètre?

6° On a payé 448 fr. 32 c. pour $28^{m.},442$; à combien revient le mètre?

7° Un marchand de vin a acheté deux tonneaux de vin qui lui revient en gros à 1 fr. 25 cent. le litre. Il le vend en détail 2 fr., et après avoir vendu le tout il a gagné 200 fr.; combien les deux tonneaux contenaient-ils de litres, et combien les a-t-il payés?

8° On a payé 345 fr. pour un tonneau de vin contenant 250 bouteilles; combien paiera-t-on pour trois tonneaux du même vin, dont le premier contient 244 bouteilles, le deuxième 256, et le troisième 280?

9° Un négociant achète de la laine à 2 fr. 50 cent. le kil., il la revend ensuite 3 fr. 50 cent.; sur la totalité il gagne 600 fr. 35 cent.; combien avait-il acheté de laine?

10° Une personne laisse en mourant une somme de 66780 à partager également entre ses trois fils; mais elle doit les sommes suivantes, savoir : 3544 fr. 75 cent., 836 fr. 44 cent., 4480 fr., et 272 fr. 25 cent. On lui doit 5240 fr. 90 cent.; que revient-il à chaque héritier?

11° On a acheté 328 mètres d'étoffe; on veut voir combien cela fait d'aunes? (Une aune a 1m.,19.)

12° Un fossé a 36 mètres de longueur; on veut savoir combien cela fait de pieds? (Un pied vaut 0m.,325.)

13° Une personne a emprunté une certaine somme qu'elle doit rembourser en 6 paiements égaux d'année en année; son revenu est de 6000 fr. Ayant mis de côté le paiement d'une année, il lui reste 10 francs 44 cent. à dépenser par jour; quelle somme a-t-elle empruntée?

14° Un ouvrier fait en 8 jours, en travaillant 5 heures par jour, 66 mètres d'ouvrage; combien 3 ouvriers en feront-ils en un mois (27 jours) en travaillant 6 heures par jour?

15° On a disposé des banquettes dans une salle pour une grande réunion. On veut savoir de suite combien cette salle peut contenir de personnes. On estime la place occupée par chacune l'un portant l'autre à 0m.,48. Il y a douze banquettes de 2m.,25 de longueur, huit autres de 2m.,44 quatre de 3m.,5 et six de 1m.,98?

16° On se propose de réunir dans une salle 500 personnes. Il y a cinquante banquettes dont trente ont 2m.,44, douze ont 3 mètres et huit ont 3m.,56; il y a en outre cinquante chaises; quelle sera la place occupée par chaque personne?

17° Une table a 30 pieds de circonférence; on demande combien de personnes pourront s'asseoir autour, si l'on donne à chacune 38 centimètres (1 pied = 0,32)?

18° Une table a 12^{m},96 de circonférence, 30 personnes sont assises autour; on demande la place que chacune occupe?

19° Un particulier veut faire entourer son champ d'un fossé qui aura en tout $100^{m.}$,2 de longueur. L'ouvrier auquel il s'adresse lui demande 65 centimes par mètre ou 2 fr. 25 cent. par jour, et il aura achevé en 28 jours. Il lui propose encore de s'adjoindre deux ouvriers qui seront payés à raison de 2 fr. 10 c. par jour pour chacun, et l'ouvrage serait terminé en 9 jours; laquelle de ces trois propositions doit-il accepter?

20° Un négociant fait un envoi de 30 ballots de coton pesant chacun 32 kilogr., on lui envoie en paiement 2 pièces de drap contenant chacune 30 mètres à raison de 25 fr. le mètre; il lui est encore dû sur son coton une somme de 1860 fr.; à combien revient le kilogr. de coton?

21° Un négociant A fait à B un envoi de 200 ballots de laine qui lui revient à 2 fr. 25 cent. le kilogr., B en paie le transport à raison de 55 cent. le myriagr.; 50 ballots pèsent chacun 36 kilogr. et les 150 autres pèsent 28 kilogr. 3 hect.; A veut gagner sur la totalité 800 fr.; on demande à combien revient le kilogr. à B, et combien il doit le vendre s'il veut à son tour gagner 950 fr. sur la totalité?

22° On veut connaître la somme des fractions suivantes en décimales et en fractions ordinaires, et savoir quelle différence il y a entre les deux résultats : $\frac{3}{5}, \frac{7}{9}, \frac{3}{7}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$?

Réponses et solutions.

1° 668 fr. 58 cent. — 2° 214 fr. 71 cent.

3° Dans cette question l'unité principale est le kilogramme, et les 8 hectogram. doivent être comptés comme 8 dixièmes. *R.* 165 fr. 10 cent.

4° Il ne faut point diviser 534,25 par 32, mais par 3200, parce que l'on sait, d'après (n° 110), que le dividende et le diviseur doivent avoir le même nombre de décimales. *R.* 16 fr. 69 cent.

5° Le mètre revient à 25 fr. 35 cent.

6° Le mètre coûte 15 fr. 76 cent.

7° Il y avait en tout $266^{\text{lit.}},66$ que le marchand a payés 333 fr. 32 cent.

8° 345 fr. | 250 = 1 fr. 38 c. $1,38 \times 264 = 336^{\text{fr.}},72$
$1,38 \times 256 = 353,\ 28$
$1,38 \times 280 = 386,\ 40$

Total $1076^{\text{fr.}},40$

9° Il avait acheté 600 kilogr. 35 décagr.

10° Il revient a chacun 15721 fr. 86 cent.

11° Puisqu'une aune vaut $1^{\text{m.}},19$, autant cette valeur est contenue de fois dans 328 autant on a d'aunes. On trouve $275^{\text{aun.}},63$ ou environ $\frac{3}{5}$.

12° 36 mètres = 36,000 | 0,325 = 110 pieds 67 centièmes. 67 centièmes réduits en divisions ordinaires du pied (n° 116), font 8 pouces 1 ligne.

13° 10 fr. 44 × 365 = 3810,60. 6000 — 3810,60

$= 2189$ fr. 40 c. $\times 6 = 13136$ fr. 40 c., somme empruntée.

14° $801^{\text{mèt.}},9$.

15° 150 personnes.

16° Chaque personne occupe 305 millimètres.

17° $0,32 \times 30 = 960 \mid 38 = 25$, il reste 10 centimètres.

18° Chaque personne occupe 36 centimètres.

19° $100^{\text{m}},2 \times 0,65$ cent. $= 65$ fr. 13 cent.

28 jours $\times 2,25$ cent. $= 63$ fr.

2,25 cent. $+$ 2,10 cent. $+$ 2,10 cent. $= 6,45$ c. $\times 9 = 58,05$ cent.

20° 32 kil. $\times 30 = 960$ kil.

25 fr. $\times 30 = 1500$ fr.

1860 fr. $+ 1500 = 3360$ fr., prix des 960 kil.

$3360 \mid 960 = 3,50$, prix du kilogr.

21° 36 kil. $\times 50 = 1500$ kilogr.

$28^{\text{kil.}},3 \times 150 = 4250$ kilogr.

$1500 + 4250 = 5750$ kilogr. ou 575 myriagr.

Transport : 575×55 cent. $= 316$ fr. 25 cent.

Prix des 200 ballots : 2 fr. 25 cent. $\times 5750 = 12937$ fr. 50 cent.

B a payé en tout 12937 fr. 50 c. $+$ 316 fr. 25 c. $+ 800 = 14053$ fr. 75 cent.

Le kilogr. est à raison de $14053,75 \mid 5750,00 = 2$ fr. 44 cent.

B vend les 5750 kilogr. pour 14053 fr. 75 cent. $+ 950 = 15003$ fr. 75 cent.

Le kilogr. est à raison de 15003 fr. 75 c. $\mid 5750,00 = 2$ fr. 60 cent.

$22^{o}\ \frac{3}{5} = 0{,}6 \ldots \frac{13608}{22680}$

$\frac{7}{9} = 0{,}7777 \ldots \frac{17640}{22680}$

$\frac{3}{7} = 0{,}4285 \ldots \frac{9720}{22680}$

$\frac{1}{4} = 0{,}25 \ldots \frac{5670}{22680}$

$\frac{2}{3} = 0{,}6666 \ldots \frac{15120}{22680}$

$\frac{5}{6} = 0{,}8333 \ldots \frac{18900}{12680}$

Total. . . $3{,}5561$ Total. $\frac{83658}{22680}$ ou $3\ \frac{12618}{22680}$ ou $3\ \frac{701}{1260}$.

$\frac{5561}{10000} = \frac{7006860}{12600000}$. $\frac{701}{1260} = \frac{7010000}{12600000}$.

En retranchant la plus faible de ces deux dernières fractions de la plus forte, il reste $\frac{3140}{12\ 00000}$ ou $\frac{157}{630000}$ pour la différence entre la somme des fractions ci-dessus désignées par les fractions décimales, et celle qui provient de leur addition en fractions ordinaires.

Théorie des fractions décimales.

(118) Les mesures dont on fait usage se divisent en mesures de longueur, de capacité, de poids, de superficie, de solidité et en monnaies. Les principales anciennes mesures sont la livre, l'once, le gros, le grain ; la toise, le pied, le pouce, la ligne ; le setier, le boisseau, la pinte, la chopine, le demi-setier, le poisson ; l'arpent, l'acre, etc.

En considérant l'ensemble de ces mesures (n° 95), on voit que l'on n'a suivi aucune règle, aucun système pour leurs divisions. Les noms qui leur sont adaptés n'indiquent nullement leur rapport à l'unité principale. Outre les inconvénients qui résultent de la variété de leurs subdivisions, elles ont encore celui de changer de valeur suivant les différentes contrées et provinces.

On a remédié à ces inconvénients en en établissant de nouvelles, dont les divisions uniformes de 10 en 10 présentent beaucoup plus de facilité pour les calculs. Étant toutes formées d'une seule mesure dont la longueur est prise dans la nature, elles ont l'avantage d'être invariables. Cette mesure unitaire est le *mètre*, qui est la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre.

Les autres sont le litre, le gramme, l'are, le stère et le franc (*Voy.* n° 96); ces mesures se divisent toutes en dixièmes, centièmes, millièmes, etc. Les noms qui sont annexés aux subdivisions sont les noms mêmes des mesures auxquels on a joint les mots : *déci* pour dixième, *centi* pour centième, *milli* pour millième.

On a de même formé des collections de l'unité principale dans la même progression que les subdivisions, c'est-à-dire que l'on a des dizaines, des centaines, des mille et des dizaines de mille de chaque mesure. Les noms de ces diverses collections sont les noms mêmes des mesures auxquels on a joint les mots : *déca* pour dizaine, *hecto* pour centaine, *kilo* pour mille, et *myria* pour dizaine de mille (n° 100).

Cette nouvelle nomenclature a naturellement conduit à un système beaucoup plus simple d'écrire ces mesures et de faire les opérations qui y sont relatives, système dont on a tiré un grand parti pour d'autres calculs.

Les chiffres ont une valeur croissante dans une progression décuple de droite à gauche, et décroissante dans la même progression de gauche à droite. On a donc placé des chiffres à droite de l'unité, et ces chiffres ont une valeur de dix en dix fois plus petite; ils expriment par conséquent des fractions que l'on nomme décimales, parce qu'on ne peut écrire ainsi que celles qui ont pour dénominateur 10, 100, 1000, etc. Le dénominateur de ces sortes de fractions n'est point représenté en chiffres, mais il est indiqué par le nombre de colonnes employées à la droite de l'unité. Le numérateur est le nombre même placé à la droite de l'unité; il s'énonce comme un nombre entier, en ajoutant à la fin le nom de la dernière colonne décimale. On sépare les unités des fractions par un point ou par une virgule.

Les entiers peuvent être transformés de suite en fractions, en énonçant les entiers et les fractions comme ne formant qu'un seul nombre que l'on considère comme numérateur.

Une des propriétés des décimales est la facilité que l'on a de pouvoir ajouter ou retrancher de la droite d'une décimale un nombre quelconque de zéros sans altérer sa valeur (94).

On rend un nombre fractionnaire décimal dix, cent, mille fois plus petit en reculant la virgule d'un, deux ou trois rangs sur la gauche; s'il n'y a point d'entiers, en mettant à gauche un, deux ou trois zéros (toujours à droite de la virgule), on le rend de même dix, cent, mille fois plus grand en reculant la virgule d'un, deux ou trois rangs sur la droite (94).

Les opérations dont sont susceptibles les fractions décimales sont les mêmes que celles des fractions ordinaires; mais elles ont l'avantage de ne pas présenter plus de difficulté que celles des nombres entiers. Le principe général est de considérer les entiers et les fractions comme ne formant qu'un seul nombre entier en faisant abstraction de la virgule.

L'addition se fait d'après ce principe, en ayant soin de séparer dans la somme les entiers des fractions; ainsi il n'est pas besoin ici de réduction au même dénominateur, ce qui pourrait cependant se faire en égalisant par des zéros le nombre des colonnes décimales, mais ce qui est inutile (102).

La soustraction se fait comme celle des nombres entiers. Si dans le nombre dont on soustrait il ne se trouvait pas de fractions, on les remplacerait par autant de zéros qu'il y a de décimales dans l'autre nombre, ou ce qui est la même chose, il faut réduire les deux nombres fractionnaires au même dénominateur (104).

La multiplication se fait encore de même que celle des nombres entiers; mais il faut avoir soin de séparer sur la droite du produit autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les deux facteurs ensemble (106, 107 et 108).

Pour la division, on aura soin d'égaliser les décimales dans le dividende et dans le diviseur, c'est-à-dire les réduire au même dénominateur, ce qui se fait en ajoutant des zéros au nombre qui a le moins de décimales (109, 110, 111 et 112).

Pour transformer en décimales le reste d'une division, on y ajoute un zéro et l'on voit combien le diviseur est contenu de fois dans ce nouveau dividende partiel; mais le chiffre que l'on obtient appartient aux dixièmes et doit par conséquent être séparé par une virgule des entiers du quotient. Au nouveau reste, s'il y en a un, on ajoute encore un zéro et l'on divise comme précédemment, mais le chiffre que l'on obtient appartient aux centièmes. Il est des opérations qui peuvent être prolongées ainsi indéfiniment. On pousse alors l'exactitude aussi loin que l'exige la nature de la question et l'on néglige le reste (113 et 114).

Pour transformer une fraction ordinaire en fraction décimale, il faut considérer le numérateur de la fraction comme le reste d'une division et opérer absolument comme il a été indiqué pour le reste d'une division. Il faut avoir soin de remplacer les unités par un zéro (115).

Questions théoriques sur les fractions décimales.

(119) 1° Quelles sont les anciennes mesures?

2° Quels inconvénients présentent-elles?

3° Quelles sont les nouvelles mesures?

4° Quels avantages présentent-elles?

5° Quelle est la mesure fondamentale, et quelle est son origine?

6° Comment les autres mesures ont-elles été formées du mètre?

7° Quelles précautions a-t-on prises pour assurer l'invariabilité du mètre et pour le retrouver, si l'on venait à en perdre les modèles?

8° Quelles précautions a-t-on prises pour assurer l'invariabilité du gramme?

9° Comment le franc a-t-il été formé du mètre?

10° Quel rapport y a-t-il entre les noms des unités principales et ceux de leurs subdivisions?

11° Quel rapport y a-t-il entre les noms des unités principales et ceux des collections qui en ont été formées?

12° Quelles sont les mesures qui présentent quelques irrégularités pour les noms de leurs subdivisions?

13° Qu'appelle-t-on fractions décimales?

14° Combien y a-t-il de manières de les exprimer, et quelle est la plus usitée?

15° Qu'y a-t-il à remarquer sur le numérateur et le dénominateur de ces fractions?

16° Quel changement s'opère-t-il dans une fraction décimale quand on ajoute des zéros à la droite? — Pourquoi? — Même question quand on en retranche?

17° Comment réduit-on des fractions décimales au même dénominateur?

18° Quel changement s'opère-t-il dans une fraction décimale quand on recule la virgule d'un, deux ou trois rangs sur la gauche? — Pourquoi?

19° Même question quand on la recule d'un, deux ou trois rangs sur la droite? — Pourquoi?

20° Comment additionne-t-on des fractions décimales?

21° Est-il nécessaire de les réduire au même dénominateur?

22° Comment soustrait-on des fractions décimales?

23° Comment multiplie-t-on des fractions décimales?

24° Combien faut-il séparer de chiffres décimaux sur la droite du produit? Expliquez cette opération sur l'exemple suivant : $3{,}4 \times 8{,}15$.

25° Comment se fait la division?

26° Quelle condition y a-t-il à observer pour la division?

27° Comment réduit-on en décimales le reste d'une division?

28° Comment réduit-on une fraction ordinaire en fractions décimales?

29° Peut-on toujours transformer exactement en décimales le reste d'une division ou d'une fraction ordinaire?

Réponses aux questions précédentes.

1° La perche, la toise, etc.

2° Les principaux inconvénients qu'elles présentent sont 1° la diversité de leurs subdivisions et de leurs noms; 2° de n'avoir pas une valeur bien déterminée, ce qui les fait varier dans différentes contrées ; 3° la difficulté que présente leur calcul.

3° Le mètre, le litre, etc.

4° — 1° Elles sont toutes formées d'une seule ; 2° elles sont invariables ; 3° elles ont une division uniforme de 10 en 10.

5° Le mètre ; c'est la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre.

6° Le litre est un décimètre cube ; le gramme est le poids d'un centimètre cube d'eau distillée à la température de la glace fondante ; le stère est un mètre cube ; l'are est 100 mètres carrés.

7° — 1° On l'a formée d'une mesure invariable qui est le méridien ; 2° les modèles le représentent à une température déterminée qui est celle de la glace fondante.

8° — 1° On a choisi de l'eau distillée, parce qu'étant plus pure, son poids est plus fixe ; 2° on a déterminé la température de cette eau, qui est celle de la glace fondante ; 3° les modèles sont pesés dans le vide.

9° Le franc pèse 5 grammes. Le gramme est formé du mètre, donc le franc en dérive aussi.

10° Les noms des subdivisions sont les noms mêmes de l'unité principale, auxquels on a ajouté les mots *déci*, etc.

11° Les noms de ces collections sont ceux des unités, auxquels on a joint les mots *déca*, etc.

12° Le décare, l'hectare, le kilare, le myriare, le centime.

13° Ce sont les fractions qui ont pour dénominateur 10, 100, etc.

14° Il y a deux manières de les exprimer : 1° sous la forme de fractions ordinaires; 2° en mettant leur numérateur à droite de l'unité principale, séparé de celle-ci par une virgule.

15° Les deux termes sont réunis en un seul. Le numérateur est le nombre même placé à droite de l'unité, le dénominateur est indiqué par le nombre des chiffres décimaux.

16° Aucun, parce qu'on multiplie à la fois les deux termes par le même nombre. Quand on en retranche, l'inverse a lieu.

17° En leur faisant occuper le même nombre de colonnes décimales.

18° Elle devient 10, 100, 1000 fois plus petite, parce que si on la recule d'un rang, par exemple, le chiffre qui était dans la colonne des unités passe dans celle des dixièmes, et ainsi des autres.

19° La fraction devient 10, 100, 1000 fois plus forte, parce que si on la recule d'un rang, par exemple, le chiffre qui était dans la colonne des dixièmes passe dans celle des unités.

20° On considère les entiers et les fractions comme ne formant qu'un seul nombre, et l'addition se fait comme celle des nombres entiers.

21° Non.

22° Comme les nombres entiers.

23° Comme les nombres entiers.

24° Il faut séparer sur la droite du produit autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les deux facteurs ensemble. — Un dixième multiplié par un centième donne un millième ; or 3,4 sont la même chose que 34 dixièmes : 8,15 sont la même chose que 815 centièmes. Ainsi 34 dixièmes multipliés par 815 centièmes donnent un certain nombre de millièmes dont on extrait les entiers en divisant le nombre par 1000, ce qui se fait en séparant 3 chiffres sur la droite.

25° Comme celle des nombres entiers.

26° Le dividende et le diviseur doivent avoir le même nombre de décimales.

27° On ajoute un zéro à ce reste, et on le divise comme les autres dividendes partiels. Le chiffre que l'on obtient étant un dixième, doit être séparé des unités par une virgule.

28° On considère le numérateur comme le reste d'une division, on y ajoute un zéro, et on le divise par le dénominateur. Le chiffre que l'on obtient appartient aux dixièmes ; s'il y a un reste, on y ajoute de même un zéro, et on le divise de nouveau ; le chiffre que l'on obtient appartient aux centièmes.

29° Souvent on ne le peut pas, mais on pousse l'exactitude aussi loin qu'on veut, et l'erreur est si faible qu'on peut la négliger.

§ X.

NOMBRES COMPLEXES.

(120) *Observ.* Nous avons commencé à traiter des nombres complexes dans le § IX, à l'article des fractions déci-

males, mais nous nous sommes bornés à indiquer l'addition et la soustraction, parce que les deux autres opérations présentent des difficultés qui demandent à être traitées séparément.

Nous avons vu (103) que les nombres complexes sont ceux qui renferment plusieurs espèces d'unités, comme 3 liv. 5 onc. 4 gr. 50 grains. Par opposition on nomme incomplexes ceux qui n'en renferment qu'une seule, comme 34 livres ou 25 toises, etc.

Multiplication.

— Un ouvrier fait par jour 6 toises 2 pieds 3 pouces d'ouvrage; combien en fera-t-il en 3 jours?

	6 t.	1 p.	3 pouc.
$\times$			3
	18 t.	3 p.	9 pouc.

Il est clair qu'il en fera en 3 jours 3 fois autant, c'est-à-dire qu'il fera 3 fois 3 pouces, 3 fois 1 pied et 3 fois 6 toises. L'opération se réduit donc à multiplier chaque espèce d'unité par le multiplicateur. On pourrait dans cette question commencer indifféremment par multiplier les plus fortes ou les plus faibles unités; mais comme il arrive ordinairement qu'en multipliant les unités inférieures on rencontre des unités d'un ordre supérieur, cela entraînerait le même inconvénient que pour l'addition, comme dans l'exemple suivant:

— Un objet pèse 6 livres 4 onces 3 gros; combien pèseront 6 objets semblables?

6 liv.	4 onc.	3 gr.		6 liv.	4 onc.	3 gr.
×		6		×		6
36 liv.	12 onc.	18 gr.		37 liv.	10 onc.	2 gr.

Dans cette question, la multiplication des gros en donne 18; mais 18 gros font 2 onces et 2 gros; on pose ces 2 gros sous les unités de la plus petite espèce et l'on retient 2 onces. 6 fois 4 onces font 24, plus 2 onces de retenues font 26 onces ou 1 livre 10 onces; on pose ces 10 onces dans la colonne des onces, et l'on retient 1 livre. 6 fois 6 livres font 36 livres, plus une livre de retenue font 37 livres.

(121) — Si une livre coûte 12 fr., combien coûteront 8 onces?

Solution. 8 onces sont la moitié d'une livre, elles coûteront donc la moitié de 12 fr. ou 6 fr. On voit que ceci est une véritable multiplication de fractions; puisque 8 onces ne sont autre chose qu'une demie, il faut donc multiplier 12 par une demie.

— Si une livre coûte 20 fr., combien coûteront 12 onces?

Solution. 12 onces ne sont autre chose que les trois quarts d'une livre, elles coûteront donc les trois quarts de 20 fr. ou 15 fr.

On pourrait dire encore : 8 onces doivent coûter la moitié du prix d'une livre ou 10 fr., il reste 4 onces qui doivent coûter la moitié du prix de 8 onces, c'est-à-dire 5 fr. qu'il faut ajouter au prix de 8 onces, cela fait ensemble 15 fr.

Observation. L'instituteur proposera un certain nombre de questions extrêmement simples, analogues aux précédentes, afin de familiariser l'élève avec ces sortes de décompositions. Il est important qu'il les comprenne parfaitement avant d'aller plus loin.

— Si une livre coûte 12 fr., combien coûteront 6 livres 12 onces?

	12 fr.	
×	6 liv.	12 onc.
	72	
	9	
	81	

Dans cette question il faut multiplier 12 par 6 liv. 12 onces, ou, ce qui revient au même, par 6 $\frac{3}{4}$. On multiplie d'abord par 6 livres, ce qui donne 72 fr. Si au lieu des 12 onces qui restent on n'en n'avait que 4, il est certain que ces 4 onces coûteraient le quart du prix de la livre, c'est-à-dire 3 fr.; mais 12 onces coûteront 3 fois le prix de 4 onces ou 9 fr. qu'il faut ajouter au prix des 6 livres; en additionnant ces deux produits partiels, on trouve le produit total 81 fr.

(122) — Si une livre coûte 24 fr., combien coûteront 3 livres 15 onces?

	24 fr.	
×	3 liv.	15 onc.
	72	
	12	
	6	
	3	
	1	10 sous.
	94 fr.	10 sous.

Solution. Si une livre coûte 24 fr., 3 livres coûteront 3 fois autant ou 72 fr. Si au lieu de 15 onces on n'en n'avait que 8, il est certain qu'elles coûteraient la moitié du prix de la livre ou 12 fr. Il reste encore 7 onces; si au lieu de ces 7 onces on n'en n'avait que 4, elles coûteraient la moitié du prix des 8 onces, c'est-à-dire 6 fr. Il reste 3 onces, s'il n'en restait que 2, elles coûteraient la moitié du prix de 4 onces ou 3 fr. Enfin il reste 1 once qui doit coûter la moitié du prix de 2 onces, la moitié de 3 fr. est 1 fr. 10 sous. En ajoutant tous ces produits partiels, on trouve pour produit total 94 fr. 10 sous (*). C'est par la décomposition des unités secondaires que l'on parvient à en connaître le prix, d'après celui de l'unité principale. L'usage apprendra le moyen le plus simple de faire cette décomposition.

Cette manière d'opérer se nomme *multiplication par les parties aliquotes*, parce qu'on décompose les unités secondaires en parties aliquotes de l'unité principale ou d'autres unités secondaires. Ainsi, dans la question précédente, on a décomposé 15 onces en

(*) On s'étonnera sans doute que j'emploie à la fois les francs et les anciennes divisions de la livre; mais comme on ne fait plus de comptes en livres, l'élève n'est pas dans le cas d'en faire usage, tandis qu'on se sert souvent des sous comme divisions du franc. C'est pour cette raison que je n'ai point mis de questions sur les deniers, qui depuis long-temps ne sont plus en usage. Je m'en suis cependant servi quelquefois pour la réduction des sous, mais en général j'ai préféré me borner aux formes de questions encore usitées.

8 + 4 + 2 + 1, qui sont des parties exactes ou aliquotes de la livre ou de 16 onces. Il y a une autre manière de faire la multiplication des nombres complexes que nous indiquerons plus tard.

(123) — On a payé 12 fr. 10 sous pour une toise d'ouvrage, combien paiera-t-on pour 6 toises 4 pieds?

	12 fr.	10 s.	
×	6 t.	4 p.	
	75		
	6	5	
	2	1	8
	83 fr.	6 s.	8 d.

Solution. Si une toise coûte 12 fr. 10 sous, 6 toises coûteront 6 fois autant ou 75 fr. Si au lieu de 4 pieds on n'en n'avait que 3, ils coûteraient la moitié du prix de la toise ou 6 fr. 5 sous. Il reste 1 pied qui doit coûter la troisième partie du prix de 3 pieds; la troisième partie de 5 sous est 1 sou et il en reste 2 qui font 24 deniers dont le tiers est 8.

— Un ouvrier fait en un jour 6 toises 4 pieds, combien en fera-t-il en 3 jours 9 heures 35 minutes? (1 jour = 12 heures.)

	6 t.	4 p.		
×	3 j.	9 h.	35. min.	
	20			
	3	2		
	1	4		
		3	4	
	»	1	8	
	»	»	3	4
	25 t.	1 p.	11 pouc.	4 lign.

Solution. En trois jours il fera 3 fois 6 toises 4 pieds ou 20 toises. Si au lieu de 9 heures on n'en n'avait que 6, il ferait dans ces 6 heures la moitié de l'ouvrage qu'il fait en un jour, c'est-à-dire 3 toises 2 pieds. Il reste 3 heures pendant lesquelles il fait la moitié de l'ouvrage qu'il a fait en 6 heures, c'est-à-dire 1 toise 4 pieds. Si au lieu de 35 minutes on n'en n'avait que 30, il ferait pendant ces 30 minutes la moitié de l'ouvrage d'une heure. Le nombre que l'on vient de poser est l'ouvrage de 3 heures; on trouvera l'ouvrage d'une heure en en prenant la troisième partie, ce qui donne 3 pieds 4 pouces. Mais nous n'avons besoin de connaître que l'ouvrage d'une demi-heure ou 30 minutes; il faut donc prendre la moitié de 3 pieds 4 pouces qui est 1 pied 8 pouces. Remarquez bien que nous n'avons posé l'ouvrage d'une heure que pour faciliter la recherche du travail fait pendant une demi-heure, et qu'il ne doit point être additionné avec les autres prix; c'est pourquoi nous l'avons indiqué ici par de plus petits chiffres. Ces sortes de produits se nomment produits *auxiliaires* ou *faux produits*. On aurait pu se dispenser de l'écrire parmi les autres produits, ou bien l'on pouvait aussi prendre de suite la sixième partie de l'ouvrage de 3 heures. Il reste encore 5 minutes pendant lesquelles l'ouvrier fera la sixième partie de l'ouvrage fait en 30 minutes, c'est-à-dire la sixième partie de 1 pied 8 pouces ou 3 pouces 4 lignes; le produit total est 25 toises 1 pied 11 pouces 4 lignes.

(124) — Quel est le prix de 12 toises 3 pieds 11 pouces 5 lignes, à raison de 7 fr. 10 sous la toise?

7 fr.	10 s.		
× 12 t.	3 p.	11 p.	5 lig.
90 fr.	0 s.	0 d.	
3	15		
1	5		
	12	6	
	8	4	
	2	1	
		8 $\frac{1}{3}$	
		2 $\frac{1}{12}$	
94 fr.	18 s.	9 d. $\frac{5}{12}$.	

Solution. 12 toises coûteront 12 fois 7 fr. 10 s. ou 90 fr., 3 pieds coûteront la moitié du prix d'une toise ou 3 fr. 15 sous; 11 pouces peuvent être décomposés en 6 + 4 + 1. 6 pouces coûteront la moitié du prix d'un pied. On aura le prix d'un pied par un faux produit en prenant le tiers de 3 fr. 15 sous, qui est 1 fr. 5 sous. 6 pouces coûteront la moitié de 1 fr. 5 s., ou 12 sous 6 deniers. 4 pouces coûteront le tiers du prix d'un pied, c'est-à-dire le tiers de 1 fr. 5 sous ou 8 sous 4 deniers. Enfin 1 pouce coûtera le quart de 8 sous 4 deniers ou 2 sous 1 denier.

Les 5 lignes peuvent être décomposées en 4 + 1. 4 lignes coûteront le tiers de 2 sous 1 denier ou 8 deniers $\frac{1}{3}$. 1 ligne coûtera le quart de 8 deniers $\frac{1}{3}$ ou 2 deniers $\frac{1}{12}$.

— Combien coûteront 7 lignes, à raison de 15 fr. 12 sous la toise?

15 fr.	12 s.		
0 t.	0 p.	0 p.	7 lig.
5 fr.	4 s.	0 d.	
2	12		
1	6		
	13		
	4	4	
	1	1	
	1	1	
		$4 \frac{1}{3}$	
	2 s.	$6 \frac{1}{3}$.	

Solution. Avant de chercher le prix des 7 lignes, il faut trouver celui du pied et du pouce, ce qui se fait au moyen de produits auxiliaires. 1 pied coûtera la sixième partie de 15 fr. 12 sous, ou pour plus de facilité on prendra le tiers de 15 fr. 12 sous, qui est 5 fr. 4 sous, et la moitié de 5 fr. 4 sous qui est 2 fr. 12 sous. On trouvera le prix du pouce en prenant la deuxième partie de 2 fr. 12 sous; mais pour faciliter l'opération on prendra la moitié de 2 fr. 12 sous ou 1 fr. 6 sous, puis la moitié de la moitié ou 13 sous, puis enfin le tiers de 13 sous ou 4 sous 4 d. Il est certain que de cette manière nous avons la douzième partie de 2 fr. 12 sous, puisque nous avons pris le tiers de la moitié de la moitié de cette somme; car la moitié de la moitié est un quart et le tiers d'un quart est un douzième.

Pour trouver le prix des 7 lignes, nous les décomposons en $3+3+1$. 3 lignes coûteront le quart du prix d'un pouce ou 1 sou 1 denier. Les 3 autres lignes coûteront le même prix que les 3 premières; nous aurons donc encore une fois 1 sou 1 denier. Enfin 1 ligne coûtera le tiers de 1 sou 1 denier ou 4 deniers $\frac{1}{3}$.

(125) On peut encore faire la multiplication des nombres complexes d'une autre manière. Soit la question suivante :

— Combien coûteront 3 livres 7 onces 4 gros, à raison de 12 fr. 15 sous la livre?

$$
\begin{array}{lrl}
 & 12 \text{ fr.} & \quad 15 \text{ s.} \\
 & \times\ 444 & \quad 444 \\
\hline
 & 5328 \text{ fr.} & \quad 6660 \text{ ou } 333 \text{ fr.} \\
 & +\ 333 & \\
\hline
 & 5661 & \mid 128 = 44 \text{ fr. } 4 \text{ s. } 6 \text{ d.} \\
\text{Rest.} & 29 & \\
 & \times\ 20 & \\
\hline
 & 580 & \\
\text{Rest.} & 68 & \\
 & \times\ 12 & \\
\hline
 & 816 & \\
\text{Rest.} & 48 &
\end{array}
$$

Solution. Il s'agit de multiplier 12 fr. 15 sous par 3 livres 7 onces 4 gros. Une livre contient 128 gros; 3 livres 7 onces 4 gros font 444 gros ou $\frac{444}{128}$ de livres. Il faut donc multiplier 12 fr. 15 sous par cette fraction, ou ce qui est la même chose, multiplier le multiplicande par 444 et diviser le produit par 128; car si nous avions à multiplier par 444 unités, il suffirait de multiplier par ce nombre; mais ce sont $\frac{444}{128}$ nombre 128 fois plus petit que 444; il faut donc diviser le produit par 128, qui sans cela serait 128 fois trop fort.

12 fr. $\times$ 444 = 5328 fr., 15 sous $\times$ 444 = 6660 sous ou 333 fr. 5328 + 333 = 5661 fr. Après avoir divisé 5661 par 128, on trouve 44 fr. pour quotient et il reste 29 fr. que l'on réduit en sous en multipliant par 20, ce qui donne 580 sous. En divisant 580 par 128, on trouve pour quotient 4 sous et il reste 68 sous que l'on réduit en deniers en les multipliant par 12, on reçoit 816 deniers; divisés par 128, on trouve 6 deniers et il reste 48 que l'on peut négliger. 3 livres 7 onces 4 gros coûteront donc 44 fr. 4 sous $\frac{1}{2}$, etc.

Division des nombres complexes, le diviseur étant un nombre incomplexe.

(126) 12 toises d'ouvrage ont été payées 111 fr. 12 sous, à combien revient la toise?

$$
\begin{array}{rl}
 & 111 \text{ fr. } 12 \text{ s.} \mid 12 = 9 \text{ fr. } 6 \text{ s.} \\
 & 3 \\
\times & 20 \\
\hline
 & 60 \\
+ & 12 \\
\hline
 & 72
\end{array}
$$

Solution. Si 12 toises ont été payées 111 fr. 12 sous, une toise a dû en coûter la douzième partie. Le douzième de 111 fr. est 9 fr., il reste 3 fr. que l'on réduit en sous en les multipliant par 20, et auxquels on ajoute les 12 sous du dividende; on trouve 72 sous. La douzième partie de 72 sous est 6 sous, donc une toise a coûté 9 fr. 6 sous.

On voit, d'après cela, que diviser un nombre complexe par un nombre incomplexe, se réduit à diviser chaque espèce d'unité par le diviseur. Si une des divisions partielles présente un reste, ce qui arrive ordinairement, on joint ce reste aux unités immédiatement inférieures.

(127) On peut remarquer ici l'analogie qu'il y a entre cette opération et la division des parties décimales. Soit 325 mètr. 4 déc. 5 cent. à diviser par 6.

325 m. 4 déc. 5 c. | 6 = 54 m. 2 d. 4 c. 1 m. 6 d. m.
25
14 d.
25 c.
10 m.
40 d. m.

Après avoir divisé 325 par 6, on trouve pour quotient 54 m. et pour reste 1 qu'il faut réduire en décimètres, comme nous avons réduit dans la question précédente les 3 fr. en sous. Mais remarquez que pour réduire les 3 fr. et 12 sous en sous, il faut multiplier 3 par 20 et ajouter 12 au produit, tandis qu'ici en joignant les 4 décimètres au mètre qui reste, on a multiplié ce mètre par 10 pour en faire des décimètres et l'on a ajouté 4, ce qui ne peut se faire dans les nombres complexes que par une double opération.

En continuant la division on trouve pour quotient de 14 décim. divisés par 6, 2 décim. et 2 pour reste. A ce reste on ajoute les 5 cent., ce qui donne 25; 25 cent. divisés par 6 donne pour quotient 4 cent. et 1 pour reste. Ce reste peut être changé en millim. en le multipliant par 10, ce qui se fait en ajoutant un zéro. On trouve pour quotient 1 millimètre et 4 pour reste; ce reste peut être changé en dix-millimètres, etc., parce que ces subdivisions sont infinies. Tandis que dans les nombres complexes, arrivé à la plus petite subdivision de l'unité principale, on est obligé de transformer le reste, s'il y en a un, en une fraction ordinaire. Quelquefois on le change en une fraction décimale, comme dans cette question :

On veut connaître exactement la valeur du tiers d'aune en pieds, pouces, etc., sachant qu'une aune contient 3 pieds 7 pouces 10 lignes?

3 p. 7 pouc. 10 lign. | 3 = 1 pi. 2 p. 7 l. 3333.

Après avoir divisé 3 pieds 7 pouces 10 lignes par 3, d'après la règle que nous avons développée, on trouve pour reste 1 ligne qu'il s'agit de diviser par 3 en parties décimales. On se servira pour cela du moyen indiqué n° 113.

Le diviseur étant un nombre complexe.

(128) 4 toises 8 pieds ont coûté 63 fr. 15 sous; quel est le prix de la toise?

$$382 \text{ fr. } 10 \text{ s. } | 32 = 11 \text{ fr. } 19 \text{ s. } 0 \text{ d. } \tfrac{6}{8}.$$

On transforme le diviseur 4 toises 8 pieds en un nombre incomplexe, en réduisant tout en pieds, ce qui fait 32 pieds. Mais remarquez que pour réduire les 4 toises en pieds, on les a multipliées par 6; le diviseur est donc six fois plus grand qu'il ne devrait être. On sait que le quotient reste le même lorsqu'on multiplie le diviseur et le dividende par un même nombre; or on a multiplié le diviseur par 6, il faut aussi multiplier le dividende par le même nombre, ce qui donne 382 fr. 10 sous que l'on divise comme on l'a indiqué dans les numéros 125 et 127.

(129) *Autre manière d'opérer.* Soit la même question 63 fr. 15 sous à diviser par 4 toises 8 pieds :

$$\begin{array}{lcr} 63 \text{ fr. } 15 \text{ s. } | \; 32 & = & 1 \text{ fr. } 19 \text{ s. } 10 \text{ d. } \tfrac{1}{8}. \\ 31 & \times & 6 \\ \hline & & 11 \text{ fr. } 19 \text{ s. } 0 \text{ d. } \tfrac{6}{8}. \end{array}$$

Solution. En réduisant les 4 toises 8 pieds en pieds, on obtient 32 pieds qui ne sont autre chose que $\frac{32}{6}$ de toises; il faut donc diviser 63 fr. 15 sous par cette fraction; mais si au lieu de diviser le dividende par $\frac{32}{6}$ on le divisait par 32 unités, nombre six fois plus fort, le quotient serait six fois trop petit, car nous avons vu (nº 50) que le quotient diminue en proportion que le diviseur augmente. Puisque le quotient est six fois trop faible, il faut le multiplier par 6. Le résultat est le même que dans le n° précédent, et cela ne peut manquer d'être ainsi, puisqu'au lieu de multiplier par 6 le dividende 63 fr. 15 sous, on multiplie le quotient 1 fr. 19 s. 0 d. $\frac{1}{8}$.

On peut simplifier l'opération en réduisant la fraction $\frac{32}{6}$ à sa plus simple expression, qui est $\frac{16}{3}$, on divise par 16 et l'on multiplie le quotient par 3, ce qui donne le même résultat.

On pourrait encore expliquer cette opération de la manière suivante : en divisant 63 fr. 15 sous par 32, nombre des pieds contenus dans le diviseur, on obtient le prix du pied. Celui de la toise doit être six fois aussi grand; c'est pourquoi il faut le multiplier par 6.

(130) — Un cordier a fait pendant 3 heur. 25 min. une corde longue de 36 toises 4 pieds 9 pouces; combien en a-t-il fait par heure?

36 t. 4 pi. 9 p. | 3 h. 25 m. = 36 t. 4 pi. 9 p. | $\frac{205}{180}$ ou divisé par 205 et multiplié par 180, ou en réduisant la fraction à sa plus simple expression, on divise par 41 et l'on multiplie par 36. Le résultat est : 17 tois. 3 p. 4 pouc. 4 lign.

D'après ce qui vient d'être dit, on voit que lorsqu'on multiplie le diviseur par un nombre quelconque pour en faire un nombre incomplexe, il faut avoir soin d'augmenter le dividende dans la même proportion, ou de multiplier le quotient si on ne multiplie pas le dividende. Ce dernier moyen est en quelque sorte à préférer, parce qu'on évite par là d'avoir un grand dividende, et par conséquent une division plus difficile. Il faut surtout, avant de commencer une opération, s'assurer de l'espèce des unités du quotient. Quant au diviseur, il doit toujours être traité comme un nombre abstrait.

(131) Les exemples analogues au suivant peuvent présenter quelques difficultés.

— Une livre coûte 15 fr.; combien aura-t-on de livres pour 228 fr. 16 sous?

Remarquez que dans cette question le dividende est 228 fr. 16 sous, tandis que le quotient doit exprimer des livres. Les unités du quotient étant différentes de celles du dividende, les subdivisions de ce dernier nombre ne peuvent plus servir pour trouver les subdivisions des unités du quotient. C'est pourquoi on réduit le dividende en sous, ce qui donne 4576 sous à diviser par 20 $\times$ 15 ou 300, parce qu'il faut que le dividende et le diviseur soient augmentés dans la même proportion.

$$
\begin{array}{rl}
4576 & |\ 300 = 15 \text{ liv. } 4 \text{ onc. } 0 \text{ gr. } 30 \text{ grains } \tfrac{216}{300}. \\
1576 & \\
76 & \\
\times\quad 16 & \\
\hline
1216 & \\
16 & \\
\times\quad 8 & \\
\hline
128 & \\
\times\quad 72 & \\
\hline
9216 & \\
216 &
\end{array}
$$

Après avoir divisé 4576 par 300, on trouve pour quotient 15 liv., et pour reste 76, que l'on multiplie par 16 pour trouver les onces. On divise ensuite le produit 1216 par 300, ce qui donne 4 onces et il reste 16. On multiplie ce reste 16 par 8 pour avoir les gros; mais 300 n'étant pas contenu dans 128, le quotient des gros est nul, et l'on multiplie 128 par 72 pour avoir les grains.

Théorie des nombres complexes.

(132) Les nombres complexes sont des nombres formés de plusieurs espèces d'unités, comme 3 pieds 6 pouces 9 lignes. Ils ont été remplacés par les nombres décimaux; mais les anciennes mesures n'étant pas encore entièrement abolies, on peut être encore dans le cas d'en faire usage.

L'*addition* des nombres complexes se fait en additionnant séparément chaque espèce d'unité et en en écrivant la somme dans leur colonne respective. On peut commencer par les plus fortes ou par les plus faibles unités; mais comme il arrive ordinairement qu'en additionnant les unités inférieures on reçoit des unités d'un ordre supérieur qu'il faut retenir pour les ajouter dans la colonne à laquelle elles appartiennent, il vaut mieux commencer par les plus faibles.

La *soustraction* se fait en soustrayant séparément chaque espèce d'unité des unités correspondantes dans le nombre supérieur. Si un ordre d'unités ne peut pas être soustrait des unités correspondantes, soit qu'il n'y en ait pas assez ou qu'il n'y en ait pas du tout, on emprunte une unité de l'ordre immédiatement supérieur, que l'on ajoute au nombre trop faible. Mais si dans le nombre dont on soustrait il n'y avait point d'unités inférieures, il faudrait emprunter une unité sur les unités principales, et la décomposer en unités inférieures de chaque espèce; mais on peut aussi supposer une unité au nombre dont on soustrait, et la même quantité au nombre que l'on soustrait.

La *multiplication* d'un nombre complexe par un nombre incomplexe se fait en multipliant séparément chaque espèce d'unités en commençant par les plus faibles. Si en multipliant des unités inférieures, on reçoit des unités d'un ordre supérieur, on les retient pour les ajouter à leur rang respectif.

La multiplication par un nombre complexe se fait en multipliant d'abord par les unités principales et ensuite par chaque espèce d'unités secondaires. Ces unités secondaires sont de véritables fractions de l'unité principale; c'est pourquoi leurs produits sont plus petits que le multiplicande. Si les unités secondaires d'une espèce sont le tiers, par exemple, de l'unité principale, leur produit sera le tiers du multiplicande, suivant le rapport que nous avons remarqué dans la multiplication des fractions.

Si le nombre des unités inférieures d'une espèce n'est pas une partie exacte ou aliquote de l'unité principale ou de l'unité immédiatement supérieure, on le décompose en parties aliquotes de cette unité, ce qui facilite beaucoup l'opération. Quelquefois pour la simplifier encore, on suppose des produits partiels qui ne doivent point concourir à la formation du produit total, et que pour cette raison on nomme *faux produits* ou *produits auxiliaires*.

La *division* d'un nombre complexe par un nombre incomplexe se fait en divisant d'abord les unités principales. Le reste s'ajoute aux unités immédiatement inférieures que l'on divise à leur tour. Le reste, s'il y en a un, s'ajoute encore aux unités inférieures que l'on divise aussi, ainsi de suite. Si les dernières unités présentent un reste, on en fait une fraction ordinaire ou une fraction décimale.

Pour diviser par un nombre complexe, on réduit le diviseur en unités de la plus petite espèce, et l'opération est semblable à la précédente ; mais comme on a rendu le diviseur plus fort qu'il ne devait être, il faut augmenter le dividende de la même quantité ; ou si l'on ne multiplie pas le dividende pour l'augmenter dans la même proportion que l'on a augmenté le diviseur, il faut multiplier le quotient, ce qui revient au même.

Pour réduire les unités inférieures d'un nombre complexe en décimales de l'unité principale, il faut changer ces unités inférieures en une fraction ordinaire. A cet effet, on voit combien l'unité principale contient d'unités de la plus petite espèce ; ce nombre est le dénominateur. On réduit ensuite toutes les unités secondaires en unités de la plus petite espèce ; ce nombre est le numérateur. Cette fraction ordinaire se change en décimale par le procédé connu.

Questions sur les nombres complexes.

(133) 1° Qu'est-ce qu'un nombre complexe?

2° Par quoi les nombres complexes ont-ils été remplacés?

3° Comment se fait l'addition des nombres complexes?

4° Est-il indispensable de commencer l'addition par les plus faibles unités?

5° Comment soustrait-on les nombres complexes?

6° Que fait-on lorsque les unités d'une espèce ne peuvent pas être retranchées des unités correspondantes? Ex. : 6 pieds 3 pouces 9 lignes. — 3 pieds 6 pouces 11 lignes.

7° Comment multiplie-t-on un nombre complexe par un nombre entier?

8° Comment multiplie-t-on un nombre complexe par un nombre complexe? Ex : Une toise coûte 3 fr. 12 s.; que coûteront 4 toises 3 pieds?

9° Qu'est-ce que les parties aliquotes d'un nombre?

10° Qu'est-ce qu'un faux produit? Ex. : Si une toise coûte 6 fr. 15 sous, que coûteront 3 pouces?

11° Que fait-on lorsque le nombre des unités inférieures n'est pas une partie aliquote de l'unité principale? Ex. : On a payé 4 fr. 14 sous pour une livre de sucre; combien paiera-t-on pour 6 liv. 7 onces?

12° Y a-t-il encore un moyen de faire la multiplication des nombres complexes? Ex. : Une toise d'ouvrage coûte 6 fr. 19 sous; que coûteront 3 toises 5 pieds 4 pouces?

13° Comment doit-on considérer les unités secondaires dans un nombre complexe ?

14° Quelle analogie y a-t-il entre la multiplication des nombres complexes et celle des fractions ?

15° Comment divise-t-on un nombre complexe par un nombre incomplexe ?

16° Lorsque la division des unités d'une espèce présente un reste, que fait-on de ce reste ?

17° Comment divise-t-on par un nombre complexe ? Ex. : 3 livres 4 onces ont coûté 10 fr. 18 s. ; combien coûte la livre ?

18° Est-il indispensable d'augmenter le dividende de la même quantité dont on a augmenté le diviseur ?

19° Expliquez sur l'exemple suivant la raison pour laquelle on peut faire la même opération sur le quotient ? 3 livres 4 onces ont coûté 20 fr. 12 sous ; à combien revient la livre ?

20° Qu'est-ce qui détermine la nature des unités du quotient ?

21° Comment réduit-on un nombre complexe en fractions décimales ? Ex. : 3 livres 7 onces 5 gros à réduire en décimales de la livre.

22° Lorsqu'un nombre complexe a été transformé en décimales, comment retrouve-t-on les divisions complexes ? Ex. : 3$^{\text{liv.}}$, 4765.

Réponses aux questions précédentes.

1° Ce sont des nombres qui renferment plusieurs espèces d'unités.

2° Par les nombres décimaux.

3° On additionne séparément chaque espèce d'unités en commençant par les plus faibles.

4° On peut commencer par les plus fortes, mais il vaut mieux commencer par les plus faibles, dans le cas où l'addition de celles-ci donnerait des unités supérieures qu'il faudrait retenir.

5° On soustrait séparément chaque espèce d'unités en commençant par les plus faibles.

6° On emprunte une des unités immédiatement supérieures, ou l'on suppose une unité plus forte sur le nombre trop faible, et l'on augmente de la même quantité le nombre que l'on soustrait.

7° On multiplie séparément chaque espèce d'unités en commençant par les plus faibles. Si en multipliant les unités inférieures on reçoit des unités d'un ordre supérieur, on les retient pour les ajouter dans leurs colonnes respectives.

8° 3 fr. 12 s. $\times$ 4 tois. 3 pieds $=$ 15 fr. 19 s.

Après avoir multiplié 3 fr. 12 sous par 4 toises, il faut multiplier par 3 pieds. Mais 3 pieds étant la moitié d'une toise, cela revient à multiplier par une demie. On prend donc la moitié de 3 fr. 12 sous que l'on ajoute au prix des 4 toises.

9° Ce sont les parties exactes d'un nombre.

10° Un faux produit est un produit partiel que l'on cherche pour faciliter la recherche d'un autre produit, mais qui ne doit point concourir à la formation du produit total.

Dans cet exemple, pour trouver le prix de 3 pouces, il faut chercher celui du pied en prenant la sixième partie de 6 fr. 15 sous. 3 pouces étant un quart de pied, il faut prendre le quart du prix d'un pied. Le prix d'un pied est ici un faux produit.

11° On décompose ce nombre en parties aliquotes de l'unité principale ou d'une autre unité inférieure.

Ex. : 4 fr. 14 sous $\times$ 6 livres 7 onces. Pour multiplier par 7 onces, on décompose ce nombre en $4 + 2 + 1$, ce qui donne trois produits partiels.

12° 6 fr. 19 sous $\times$ 3 toises 5 pieds 4 pouces. On réduit le multiplicateur en unités de la plus petite espèce, ce qui donne 280 pouces ou $\frac{280}{72}$ de toises. On multiplie le multiplicande par 280, et on divise le produit par 72.

13° On doit les considérer comme des fractions de l'unité principale.

14° Le produit des unités inférieures, dans les nombres complexes, est semblable à celui des fractions en ce qu'il est plus petit que le multiplicande.

15° On divise séparément chaque espèce d'unités en commençant par les plus fortes.

16° On joint ce reste aux unités suivantes.

17° On réduit le diviseur en unités de la plus petite espèce, ce qui en fait un nombre incomplexe. Mais ayant augmenté le diviseur en le multipliant pour cette réduction, il faut augmenter le dividende.

18° On peut se dispenser d'augmenter le dividende, mais il faut alors multiplier le quotient par le même nombre par lequel on devait multiplier le dividende.

19° 20 fr. 12 sous à diviser par 3 livres 4 onces. Pour réduire 3 livres 4 onces il faut multiplier 3 liv. par 16, ce qui rend le diviseur 16 fois plus grand qu'il ne doit être. En divisant par un nombre 16 fois trop fort, on doit recevoir un quotient 16 fois trop faible. Il faut lui rendre sa véritable valeur. Si au lieu de rendre le quotient 16 fois plus grand on avait augmenté le dividende de cette même quantité, le quotient aurait toujours été exact. On peut encore dire: en divisant par le nombre des onces contenues dans 3 liv. 4 onces, on obtiendra le prix de l'once. Celui de la livre doit être 16 fois aussi grand, il faut donc le multiplier par 16.

20° La nature de la question.

21° On réduit les 7 onces 8 gros en gros, ce qui en fait 61 ou $\frac{61}{128}$, parce qu'une livre a 128 gros. On transforme cette fraction ordinaire en une fraction décimale par le procédé que l'on a indiqué. 3$^{liv.}$,04765.

22° 3$^{liv.}$,4765. Ayant cherché combien une livre contient de gros, je trouve qu'elle en contient 128, qui est le dénominateur de la fraction ordinaire. On multiplie par ce dénominateur 128 les deux termes de la fraction décimale 4765 et 1000, ce qui donne $\frac{609920}{1280000}$; mais comme on ne doit avoir que des cent vingt-huitièmes, on retranche les quatre zéros du dénominateur et les quatre derniers chiffres du numérateur, ce qui donne $\frac{60}{128}$. Cependant pour ne pas négliger les chiffres significatifs que l'on retranche du numérateur, on peut dire $\frac{61}{128}$ au lieu de $\frac{60}{128}$, ce qui ne fait pas d'erreur sensible.

Le dénominateur 128 étant composé de 16×8, parce qu'une livre a 16 onces et une once 8 gros, on divise les deux termes par l'un de ces deux facteurs, par 8, par exemple, ce qui donne $\frac{7}{16}$ et il reste 4 qui sont $\frac{4}{8}$. Mais la première de ces deux fractions équivaut à 7 onces, et la seconde à 4 gros.

Applications des nombres complexes.

(134) — 1° Trois ouvriers travaillant chacun 6 heures par jour ont fait en 2 jours 60 toises 5 pieds 4 pouces d'ouvrage; combien chaque ouvrier a-t-il fait par heure?

— 2° Un marchand achète 128 aunes de drap pour 3276 fr. 16 sous; à combien revient l'aune?

— 3° Un marchand achète 65 aunes $\frac{1}{2}$ de mousseline à 5 fr. 10 s., et 25 aunes $\frac{3}{4}$ de toile à 3 fr. 4 s.; combien a-t-il payé le tout, et combien l'a-t-il vendu, s'il gagne 1 fr. 8 s. sur la mousseline et 2 fr. 14 s. sur la toile?

— 4° Une personne de 50 ans pèse 128 liv. 4 onc. 5 gros; combien pesait-elle il y a 25 ans, sachant que son poids a augmenté des deux cinquièmes de ce qu'il était à cette époque?

— 5° Une personne de 60 ans pèse 245 liv. 15 onc. 5 gros; combien pesait-elle il y a 30 ans, si son poids a augmenté des trois huitièmes?

— 6° Un marchand de bas a vendu 30 paires de bas, dont vingt-cinq à 4 fr. 10 s. la paire, et cinq à 3 fr. 12 s. Il gagne sur les premiers 25 sous, et sur les seconds 30 sous; combien les a-t il vendus; combien a-t-il gagné en tout, et combien lui avaient-ils coûté?

— 7° Une table de marbre a été payée à raison de 3 fr. 10 s. le pied carré; elle a 9 pieds carrés; combien coûte-t-elle?

— 8° Une table de marbre a été payée 60 fr.; à combien revient le pied carré, si elle a 7 pieds 9 pouces carrés?

— 9° Une table de marbre a 5 pieds 8 pouces de long et 2 pieds 9 pouces de large; combien a-t-elle coûté si elle est à raison de 4 fr. 5 s. le pied carré?

— 10° Quatre ouvriers ont fait en 12 jours un certain nombre de toises à raison de 4 fr. 10 s. la toise. L'ouvrage a été payé 390 fr.; combien y avait-il de toises et combien chaque ouvrier a-t-il gagné en tout?

— 11° Un épicier a acheté du sucre qui lui revient en gros à 160 fr. le quintal; combien vendra-t-il 4 onces, si en détail il gagne 14 s. par livre?

— 12° Un épicier achète 60 livres de café que l'on vend en détail à 2 fr. 10 s. la livre. On lui fait une remise de 5 sous par livre, parce qu'il l'achète en gros; il le revend 3 fr. au détail; combien a-t-il payé le tout et combien a-t-il gagné? Une personne en achète 11 onces; combien les a-t-elle payées?

— 13° Une personne prévoyant que le prix des sucres doit augmenter, en achète 200 pains de 6 livres chacun pour 1740 fr., qu'elle espère vendre avec bénéfice. Elle effectue la vente de 110 pains à 2 fr. 5 s. la livre; mais le prix venant tout à coup à baisser, elle vend le reste à 1 fr. 5 s.; a-t-elle perdu ou gagné?

Réponses et solutions.

1° 60 tois. 5 p. 4 pouc. | 3 = 20 tois. 1 p. 9 pouc. 4 lign.

20 tois. 1 p. 9 pouc. 4 lign. | 2 = 10 tois. 10 pouc. 8 lign.

10 tois. 10 pouc. 8 lign. | 6 = 1 tois. 4 p. 1 pouc. 9 lign. $\frac{1}{3}$; ouvrage d'un ouvrier en une heure.

2° 3276 fr. 16 s. | 128 = 25 fr. 12 s.

3° 5 fr. 10 s. × 65 $\frac{1}{2}$ = 360 fr. 5 s.
3 fr. 4 s. × 25 $\frac{3}{4}$ = 82 fr. 8 s.

Coût. . . . . . . 442 fr. 13 s.
1 fr. 8 s. × 65 $\frac{1}{2}$ = 91 14
2 fr. 14 s. × 25 $\frac{3}{4}$ = 69 10 6 d.

Prix de la vente. . 603 fr. 17 s. 6 d.

4° Puisque son poids a augmenté de deux cinquièmes, le poids actuel de 128 liv. 4 onc. 5 gros doit être les sept cinquièmes de ce qu'il était il y a 25 ans. Ainsi on trouvera ce poids en prenant la septième partie du poids actuel, et en le répétant 5 fois. On trouve pour résultat : 91 livres 10 onces 1 gros 20 grains $\frac{4}{7}$.

5° 178 liv. 14 onc. 2 gr. 13 grains $\frac{1}{11}$.

6° 4 fr. 10 s. × 25 = 112 fr. 10 s.
3 fr. 12 s. × 5 = 18 fr.

Prix de la vente. . 130 fr. 10 s.
Gain total. . . . 38 15

Coût. . . . . . . 091 fr. 15 s.

7° 31 fr. 10 s.

8° Un pied carré contient 144 pouces carrés ; car supposons un carré ayant un pied dans tous les sens, et chaque côté partagé en 12 parties ou 12 pouces ; si l'on joint ces divisions par des lignes, les unes dans le sens vertical, les autres dans le sens horizontal, il est clair qu'on aura 144 petits carrés ayant chacun 1 pouce.

7 pieds 9 pouces font 1017 pouces carrés. Pour avoir le prix du pouce carré, il faut diviser 60 fr. par 1017, et le prix du pied devant être 144 fois plus fort, il faudra multiplier le résultat par 144. On réduit les 60 fr. en centimes, ce qui donne 6000 centimes. Le prix du pouce carré sera donc exprimé en centimes. Comme la division ne s'effectue pas exactement on va au delà des centimes et l'on reçoit $0^{fr.}$, 05899 et un reste que l'on peut négliger. En multipliant ce nombre par 144, on reçoit 8, 49496 ou simplement $8^{fr.}$, $49^{cent.}$ pour le prix du pied carré. Remarquez que l'on aurait pu multiplier le dividende 6000 par 144 au lieu de multiplier le quotient, le résultat aurait été le même.

9° 5 pieds 8 pouces font 68 pouces ; 2 pieds 9 pouces font 33 pouces. La table a donc 68 pouces de long sur 33 pouces de large. Pour trouver le nombre de pouces carrés contenus dans toute la surface de la table, il faut multiplier 68 par 33, ce qui donne 2244 pouces carrés. Puisqu'il faut 144 pouces carrés pour faire 1 pied carré, on divisera 2244 par 144, et le résultat 15 pieds 84 pouces indique que la table contient 15 pieds 84 pouces carrés. Il faut donc multiplier 4 fr. 5 s. par 15 pieds 84 pouces. Pour multiplier par 84 on décompose ce nombre en 72 + 12. 72 étant la moitié de 144, on prendra la moitié du prix du pied carré. 12 étant la sixième partie de 72, on prendra la sixième partie du prix de 72 pouces. En ajoutant ces trois produits partiels, on trouve pour le prix total 66 fr. 4 s. 6 d.

10° 390 fr. | 4 fr. 10 s. = 86 toises 4 pieds.

390 fr. | 4 fr. = 97 fr. 10 s.

11° 160 | 100 = 1 fr. 12 s., prix de la livre en gros + 14 s. = 2 fr. 6 s., prix de la livre au détail. 4 onc. sont le quart d'une livre; elles coûteront le quart de 2 fr. 6 s. ou 11 sous $\frac{1}{2}$.

12° Achat des 60 livres, 135 fr. Vente, 180 fr. Gain, 45 fr. Prix des 11 onces, 2 fr. 1 s. 1 liard.

13° Achat de 1200 livres.	1740 fr.
1re vente de 660 liv. à 2 fr. 5 s.	1485 fr.
2me vente de 540 liv. à 1 fr. 5 s.	640
Total de la vente. . .	2125
	— 1740
Gain.	385 fr.

§ XI.

RÉDUCTION DES NOUVELLES MESURES EN ANCIENNES, ET DES ANCIENNES EN NOUVELLES.

(135) — Une salle a 30 pieds de long, on veut savoir combien cela fait de mètres?

Solution. En consultant la table de la réduction des anciennes mesures en nouvelles, on trouve que le pied vaut $0^{m.}$, 3248. 30 pieds vaudront donc 30 fois autant ou $9^{m.}$,744.

— Une montagne a 1500 toises d'élévation, on veut connaître sa hauteur en mètres?

Solution. D'après la table on sait qu'une toise vaut $1^{m.}$, 949; 1500 toises vaudront donc 1500 fois autant ou $2923^{m.}$, 5.

— La distance de Paris à Lyon est de 100 lieues; combien cela fait-il de myriamètres?

Solution. Une lieue vaut $0^{myr.}$, 39; 100 lieues valent par conséquent 100 fois 0, 39 ou 39 myriamètres.

(136) D'après cela on voit que lorsqu'on veut transformer un nombre quelconque d'anciennes mesures en nouvelles, il faut chercher la valeur de l'ancienne unité en nouvelle, et multiplier cette valeur par le nombre des anciennes unités. Ainsi lorsqu'on veut transformer un nombre de toises en mètres, on cherche la valeur de la toise en mètres, et on la multiplie par le nombre de toises. Si l'on voulait transformer de nouvelles unités en anciennes, l'opération serait inverse, c'est-à-dire qu'on chercherait la valeur de la nouvelle mesure en ancienne, et qu'on multiplierait cette valeur par le nombre des nouvelles unités. Par exemple :

(137) — Une salle a 6 mètres de long, on veut savoir combien cela fait de toises, pieds, pouces, etc.?

Solution. On trouve dans les tables que 1 mètre vaut 3 pieds 11,296 lig., 6 mètres vaudront nécessairement

6 fois autant ou 18 pieds 5 pouces 7,776 lignes (*).

(138) — Un bâton a 4 pieds 5 pouces 6 lignes; on demande combien cela fait de mètres?

Solution. Un pied vaut 0^{m},3248, 4 pieds vaudront 4 fois autant ou 1^{m},2994; 1 pouce vaut 0^{m},0271, 5 pouces vaudront 5 fois autant ou 0^{m},1354, 1 ligne vaut 0^{m},0025, 6 lignes vaudront 6 fois autant ou 0^{m},0135. En additionnant la valeur de 4 pieds, celle de 5 pouces et celle de 6 lignes, on trouvera la longueur totale du bâton.

On peut même remarquer que cette opération est presque entièrement faite dans les tables, car on y trouve de suite la valeur de 4 pieds, de 5 pouces et de 6 lignes, qu'il suffit d'additionner.

(139) — La hauteur du Mont-Blanc est de 4775 mètres, on veut savoir combien cela fait de toises?

Solution. On peut le faire de deux manières, soit en multipliant 3 pieds 11,296 lignes par 4775, ou en cherchant dans les tables la valeur de 4000, de 700, de 70 et de 5 mètres; en additionnant ces quatre nombres dont la somme est la hauteur demandée en pieds, pouces, etc., on trouve 14699 pieds 6 pouces 10,4 lignes.

(140) — La longueur d'une salle est de 10,4 mètres, quelle est sa longueur en pieds?

Solution.	10 mètres =	30 p.	9 p.	4,96 lig.
	4 décim. =	1	2	9,31
	Total	32	0	2,27

(*) Tout nombre partagé par une virgule indique une fraction décimale.

— Combien 54 mètres 35 centimètres font-ils de pieds?

R. 50 mètres	=	153 pi.	11 po.	0,80 lig.
4 mèt.	=	12	3	9,18
3 décim.	=	0	11	0,98
5 cent.	=	0	1	10,16
		167	3	9,12

(141) — Combien 33 aunes font-elles de mètres?

Solution. 1 aune vaut 1,19 mètres, 33 aunes valent 33 fois 1,19 ou 39,27 mètres.

— Combien 25 aunes $\frac{3}{4}$ font-elles de mètres?

Solution. 25 aunes font 25 fois 1,19 ou 29,75 mètres. Un quart vaut $0^{m.}$,29, trois quarts valent trois fois 0,29 ou 0,87. $29,75 + 0,87 = 30,62$ mètres.

— Combien 48 aunes $\frac{7}{12}$ font-elles de mètres?

Solution. 48 aunes font 57,12 mètres, $\frac{1}{12}$ vaut 0,09 mètres, $\frac{7}{12}$ valent 7 fois autant ou 0,63. $57,12 + 0,63 = 57,75$ mètres.

(142) 35 livres 6 onces font combien de kilogrammes?

Solution. 10 livres font 4,895 kil., 30 liv. = 3 fois $4,895 = 14,685$ kil., 5 livres font 2,447 kil., $14,685 + 2,447 = 17,132$ kil. 6 onces = 0,1836 kil., + $17,132 = 17,3156$ kil.

— Un champ contient 100 arpents; combien cela fait-il d'ares?

Solution. 1 arpent vaut 34,19 ares, 100 arpents valent 100 fois autant ou 3419 ares ou 34 hectares 19 ares.

— Un champ contient 52 hectares; combien cela fait-il d'arpents?

Solution. 1 hectare contient 2,927 arpents, 52 hect. en contiennent 52 fois autant ou 152,204 arpents.

(143) — Une toise d'ouvrage a été payée 12 fr.; combien paiera-t-on le mètre? (1 mètre = 3 pieds 11 lignes $\frac{1}{2}$.

Solution. Cette question est une multiplication de nombres complexes. Il faut multiplier 12 fr. par 3 pieds 11 lignes $\frac{1}{2}$, d'après le procédé qui a été indiqué n° (121). On trouve pour résultat 6 fr. 14 cent.

— Un marchand vendait du drap à 25 fr. l'aune, il le vend maintenant au mètre; combien doit-il le vendre à cette mesure? (1 mètre = 0,84 aunes.)

Solution. Si le mètre était égal à l'aune, les prix seraient les mêmes; si le mètre était la centième partie de l'aune, le prix en serait la centième partie; mais puisqu'il en est les $\frac{84}{100}$, il faut donc prendre la centième partie de 25 fr. et la répéter 84 fois, ou multiplier 25 fr. par 84, et diviser le produit par 100, ce qui revient au même et ce qui est une véritable multiplication de fractions; ou enfin, pour multiplier une fraction décimale, il faut multiplier les chiffres significatifs et retrancher du produit autant de décimales qu'il y en a dans les deux facteurs, ce qui revient à ce que nous venons de dire tout à l'heure. $25 \times 0,84 = 21$ fr.

— Si 30 aunes d'étoffe ont été vendues 246 fr., à combien revient le mètre?

Solution. Une aune coûtera la trentième partie de

246 fr. ou 8 fr. 20 cent. Pour avoir le prix du mètre, il faut multiplier 8 fr. 20 cent. par 0,84, ce qui donne 6 fr. 88 cent.

— 10 mètres d'étoffe ont été payés 82 fr.; combien paiera-t-on 7 aunes?

Solution. 1 mètre coûtera la dixième partie de 82 fr. ou 8 fr. 20 cent. Pour avoir le prix d'une aune, il faut multiplier le prix du mètre par 1,19, parce qu'une aune contient 1 mètre 19 centièmes, le résultat est 9 fr. 75 cent.

(144) — Le kilogramme de sucre coûte 3 fr.; à combien revient l'once? (1 once = 30,59 grammes.)

Solution. Puisqu'une once vaut 30,59 grammes, il faudrait chercher le prix du gramme en prenant la millième partie de 3 fr. qui est 0,003 et en le multipliant par 30,59, alors on retranchera cinq décimales du produit. On peut encore considérer les décagram. comme unités, alors on saura qu'une once vaut 3,059 décagr. Pour avoir le prix du décagramme, il faut prendre la centième partie de 3 fr. qui est 0,03 et le multiplier par 3,059. Il faut de même retrancher cinq décimales du produit, le résultat est 0,09177 ou simplement 9 cent. pour le prix d'une once.

— Si une livre de café coûte 2 fr. 50 cent., combien coûte le kilogram.? (1 kilogr. = 2 livres 0 once 5 gros 35,15 grains ou 2,0429 livres.)

R. 2 fr. 50 cent. $\times$ 2,0429 = 5,107250 ou 5 fr. 10 cent.

— On a acheté 100 pintes ou bouteilles pour 254 fr.; à combien revient le litre? (1 litre = 1,07 pinte.)

Solution. Une pinte coûtera la centième partie de 250 fr. ou 2 fr. 50 cent. Il faut multiplier le prix de la pinte par la valeur du litre en pintes, c'est-à-dire par 1,07, ce qui donne pour prix du litre 2 francs 67 cent.

— Un négociant A fait à B un envoi de deux quintaux de laine pour 700 fr.; combien B doit-il vendre le kilogramme s'il veut gagner 75 cent. par livre?

Solution. Si 2 quintaux coûtent 700 fr., 1 quintal coûtera la moitié de 700 fr. ou 350 fr. Une livre coûtera la centième partie de 350 fr. ou 3 fr. 50 cent. Si B veut gagner 75 cent. par livre, il faut ajouter 75 cent. à 3 fr. 50 cent., ce qui fait 4 fr. 25 cent. Pour avoir le prix du kilogramme, il faut multiplier celui de la livre par 2,0429, ce qui donne 8 fr. 68 cent.

Différentes hauteurs et distances exprimées en anciennes mesures à évaluer en nouvelles, ou exprimées en nouvelles à évaluer en anciennes.

		mètres.
(145)	Le Chimboraço au Pérou.	6530
	Le pic le plus élevé du Thibet. . .	7821
	Le pic de Ténériffe. . :	7088
	Le Mont-Blanc.	4775
	Le Mont-Perdu (Pyrénées). . . .	3436
	Etna (Sicile).	3237
	Vésuve.	1198
	La plus haute pyramide d'Egypte. .	146
	La tour de Strasbourg.	142

Distances en lieues ordinaires à évaluer en myriamètres :

		lieues.
De Paris à	Rome.	270
———	Londres.	90
———	Saint-Pétersbourg.	500
———	Marseille.	169
———	Bordeaux.	130
———	Madrid.	250

Observation. Nous donnons dans la table suivante une comparaison des lieues ordinaires et des lieues de poste en myriamètres, ainsi que l'évaluation des milles anglais et allemands en lieues françaises.

Table de la réduction des anciennes mesures en nouvelles, et des nouvelles en anciennes.

(146) Conversion de la toise en mètres..

toises.	mètres.	pieds.	mètres.
1	1,9490	1	0,3248
2	3,8981	2	0,6497
3	5,8481	3	0,9755
4	7,7961	4	1,2994
5	9,7452	5	1,6242
6	11,6942	6	1,9490
7	13,6433		
8	15,5923		
9	17,5413		
10	19,4904		

pouces.		lignes.	
1	0,0271	1	0,0023
2	0,0541	2	0,0045
3	0,0812	3	0,0067
4	0,1083	4	0,0090

*

pouces.		lignes.	
5	0,1354	5	0,0113
6	0,1624	6	0,0135
7	0,1895	7	0,0158
8	0,2166	8	0,0180
7	0,2436	9	0,0203
10	0,2707	10	0,0226
11	0,2978	11	0,0248
12	0,3248	12	0,0271

(147) Conversion du mètre en toises, pieds, etc.

m.	t.	p.	p.	lig.	m.	t.	p.	p.	lig.
1	0	3	0	11,29	100	50	6	10	1,6
2	1	0	1	10,59	200	102	3	8	3,2
3	1	3	2	9,88	300	153	5	6	4,8
4	2	0	3	9,18	400	205	1	4	6,4
5	2	3	4	8,48	500	256	3	2	8,0
6	3	0	5	7,77	600	307	5	0	9,6
7	3	3	6	7,07	700	359	0	10	11,2
8	4	0	7	6,36	800	410	2	9	0,8
9	4	3	8	5,66	900	461	4	7	2,4
10	5	0	9	4,96	1000	513	0	5	4,0
20	10	1	6	9,92	2000	1026	0	10	8
30	15	2	4	2,88	3000	1539	1	4	0
40	20	3	1	7,84	4000	2052	1	9	4
50	25	3	11	0,80	5000	2565	2	2	8
60	30	4	8	5,76	6000	3078	2	8	0
70	35	5	5	10,72	7000	3591	3	1	4
80	41	0	3	3,68	8000	4104	3	6	8
90	46	1	0	8,64	9000	4617	4	0	0
					10000	5130	4	5	4

déc.	pi.	p.	lig.	c.	p.	lig.	millim.	lig.
1	0	3	8,32	1	0	4,63	1	0,44
2	0	7	4,65	2	0	8,86	2	0,88
3	0	11	0,98	3	1	1,29	3	1,32
4	1	2	9,31	4	1	5,73	4	1,77
5	1	6	5,64	5	1	10,16	5	2,21

déc.	pi.	p.	lig.	c.	p.	lig.	millim.	lig.
6	1	10	1,97	6	2	2,59	6	2,65
7	2	1	10,30	7	2	7,03	7	3,10
8	2	5	6,63	8	2	11,46	8	3,54
9	2	9	2,96	9	3	3,89	9	3,98
10	3	0	11,29	10	3	8,32	10	4,43

(148) Conversion de l'aune en mètres.

aunes.	mètres.	aunes.	mètres.
1	1,19	$\frac{1}{2}$	0,594
2	2,38	$\frac{1}{4}$	0,297
3	3,56	$\frac{1}{8}$	0,148
4	4,75	$\frac{1}{16}$	0,074
5	5,94	$\frac{1}{32}$	0,037
6	7,13	$\frac{1}{3}$	0,396
7	8,32	$\frac{1}{6}$	0,198
8	9,51	$\frac{1}{12}$	0,099
9	10,70	$\frac{1}{24}$	0,050
10	11,88		
50	59,42		
100	118,84		

Conversion du mètre en aunes.

mètres.	aunes.	décim.	
1	0,841436	1	0,0841436
2	1,68	2	0,16
3	2,52	3	0,25
4	3,36	4	0,33
5	4,20	5	0,42
6	5,04	6	0,50
7	5,88	7	0,58
8	6,73	8	0,67
9	7,57	9	0,75
10	8,41	10	0,84
100	84,14		

(149) Conversion des lieues en myriamètres.

Lieues de 25 au degré.		*Lieues de poste.*	
lieues.	myriam.	lieues.	myriam.
1	0,44	1	0,39
2	0,89	2	0,78
3	1,33	3	1,17
4	1,78	4	1,56
5	2,22	5	1,94
6	2,67	6	2,34
7	3,11	7	2,73
8	3,56	8	3,12
9	4,00	9	3,51
10	4,44	10	3,90
$\frac{1}{2}$	0,23	$\frac{1}{2}$	0,19
$\frac{1}{4}$	0,11	$\frac{1}{4}$	0,10

Conversion des myriamètres en lieues communes.

myriam.	lieues.	myriam.	lieues.
1	2,248352	6	13,49
2	4,49	7	15,93
3	6,74	8	17,98
4	8,99	9	20,23
5	11,24	10	22,48

Poids. Conversion des livres, onces, etc. en kilogrammes.

livr.	kilogram.	onces.	grammes.	gros.	grammes.
1	0,4895	1	30,59	1	3,82
2	0,9790	2	61,19	2	7,65
3	1,4685	3	91,78	3	11,47
4	1,9580	4	122,38	4	15,30
5	2,4475	5	152,97	5	19,12
6	2,9370	6	183,56	6	22,94
7	3,4265	7	214,16	7	26,77
8	3,9160	8	244,75	8	30,59
9	4,4056	9	275,35		
10	4,8951	10	305,94		

grains.	grammes.	grains.	grammes.
1	0,0513	10	0,531
2	0,106	20	1,062
3	0,159	30	1,593
4	0,212	40	2,124
5	0,266	50	2,665
6	0,319	60	3,196
7	0,372	70	3,727
8	0,425		
9	0,478		

Conversion des grammes en livres, onces, etc.

gramm.	l.	onc.	gros.	gr.	gramm.	l.	onc.	gros.	gr.
1	0	0	0	19	60	0	1	7	50
2	0	0	0	38	70	0	2	2	22
3	0	0	0	56	80	0	2	4	66
4	0	0	1	3	90	0	2	7	38
5	0	0	1	22	100	0	3	2	11
6	0	0	1	41	200	0	6	4	21
7	0	0	1	60	300	0	9	6	32
8	0	0	2	7	400	0	13	0	43
9	0	0	2	25	500	1	0	2	53
10	0	0	2	44	600	1	3	4	64
20	0	0	5	17	700	1	6	7	3
30	0	0	7	61	800	1	10	1	13
40	0	1	2	33	900	1	13	3	24
50	0	1	5	5	1000	2	0	5	35

kilogr.	l.	onc.	gros.	gr.	kilogr.	l.	onc.	gros.	gr.
1	2	0	5	35	20	40	13	5	55
2	4	1	2	70	30	61	4	4	47
3	6	2	0	33	40	81	11	3	38
4	8	2	5	69	50	101	2	2	30
5	10	3	3	32	60	122	9	1	21
6	12	4	0	67	70	143	0	0	13
7	14	4	6	30	80	163	6	7	4
8	0	0	2	7	90	183	13	5	68
9	0	0	2	25	100	204	4	4	59
10	0	0	2	44	1000	2042	14	0	14

(150) Conversion des pintes, setiers, etc. en litres.

pintes.	litres.	setiers.	litres.
1	0,93	1	7,45
2	1,86	2	14,90
3	2,79	3	22,35
4	3,73	4	29,80
5	4,66	5	37,25
6	5,59	6	44,70
7	6,52	7	52,15
8	7,45	8	59,60
		9	66,85
		10	74,50
		36 ou 1 muid.	268,20

Conversion des litres en setiers et pintes.

litres.	setiers.	pintes.	litres.	setiers.	pintes.
1	0	1,07374	20	2	5,47
2	0	2,14	30	4	0,21
3	0	3,22	40	5	2,94
4	0	4,29	50	6	5,68
5	0	5,36	60	8	0,42
6	0	6,44	70	9	3,16
7	0	7,51	80	10	5,89
8	1	0,58	90	12	0,63
9	1	1,66	100	13	4,37
10	1	2,73	1000	134	1,74

Conversion des boisseaux en litres.

boisseaux.	litres.	boisseaux.	litres.
1	13,0	7	91,05
2	26,01	8	104,06
3	39,02	9	117,07
4	52,02	10	130,08
5	67,03	11	143,08
6	78,04	12 ou 1 setier.	156,09

Conversion des hectolitres en setiers et en boisseaux.

hectolitres.	setiers.	hectolitres.	boisseaux.
1	0,641	1	7,68739
2	1,282	2	15,37
3	1,923	3	23,06
4	2,564	4	30,74
5	3,205	5	38,43
6	3,846	6	46,12
7	4,487	7	53,81
8	5,128	8	61,49
9	5,769	9	69,18
10	6,410	10	76,87
100	64,102	100	768,73

(151) Conversion des arpents en hectares.

arp. de 18 pi. la p.	hect.	arp. de 22 pi. la p.	hect.
1	0,3419	1	0,510
2	0,683	2	1,021
3	1,025	3	1,531
4	1,367	4	2,042
5	1,709	5	2,552
6	2,051	6	3,062
7	2,393	7	3,573
8	2,735	8	4,083
9	3,077	9	4,593
10	3,419	10	5,104
100	34,190	100	51,038

Conversion des hectares en arpents.

hect.	arp. de 18 pi. la perch.	hect.	arp. de 22 pi. la perch.
1	2,927	1	1,959
2	5,854	2	3,919
3	8,781	3	5,878
4	11,707	4	7,837
5	14,634	5	9,797

hect.	arp. de 18 pi. la perch.	hect.	arp. de 22 pi. la perch.
6	17,561	6	11,756
7	20,488	7	13,715
8	23,415	8	15,677
9	26,342	9	17,634
10	29,269	10	19,593
100	292,687	100	195,931

(152) Conversion des voies de bois (Paris) en stères, et des stères en voies.

voies.	stères.	stères	voies.
1	1,92	1	0,52096
2 ou une corde	3,84	2	1,04
3	5,76	3	1,56
4	7,68	4	2,08
5	9,60	5	2,60
6	11,52	6	3,12
7	13,44	7	3,64
8	15,36	8	4,16
9	17,28	9	4,68
10	19,19	10	5,20

(153) Conversion des milles anglais et allemands (*) en lieues communes de 2282 toises.

milles anglais.	lieues.	milles allemands.	lieues.
1	0,362	1	2,0834
2	0,724	2	4,16
3	1,086	3	6,25
4	1,448	4	8,33
5	1,810	5	10,41
6	2,172	6	12,50
7	2,534	7	14,58
8	2,896	8	16,66
9	3,258	9	18,75
10	3,621	10	20,83

(*) Le milie allemand dont nous parlons ici est dit *grand*

Conversion des lieues françaises en milles anglais et allemands.

lieues.	milles anglais.	lieues.	milles allemands.
1	2,761	1	0,479
2	5,52	2	0,95
3	8,28	3	1,43
4	11,04	4	1,91
5	13,80	5	2,39
6	16,56	6	2,87
7	19,32	7	3,35
8	22,08	8	3,83
9	24,84	9	4,31
10	29,61	10	4,79

Monnaies.

Le franc vaut.	1 livre 3 den.
La livre vaut.	0 fr. 99 cent.
La pièce de 3 livres vaut.	2 fr. 75 cent.
La pièce de 6 livres vaut.	5 fr. 80 cent.
La pièce de 24 livres vaut.	23 fr. 55 cent.
La pièce de 48 livres vaut.	47 fr. 20 cent.

§ XII.

PROPORTIONS.

(154) *Observation.* Avant de commencer les proportions, il est bon de faire faire à l'élève les exercices de calcul de tête sur cette partie, qui se trouvent à la fin du premier volume. Cette préparation lui facilitera beaucoup l'intelligence de ce que nous allons développer.

Lorsque l'on compare deux nombres, on peut le faire de deux manières, soit en considérant la diffé-

---

mille, pour le distinguer du mille géographique, qui vaut 1li.,667, et du petit mille, qui vaut 1li.,411.

rence qui existe entre eux, soit en cherchant combien l'un est contenu de fois dans l'autre. Ainsi lorsqu'on dit qu'entre 10 et 5 la différence est 5, on les compare sous le rapport de la différence ; et lorsqu'on dit que 5 est contenu deux fois dans 10, on les compare sous le rapport du quotient ; deux nombres ainsi comparés forment un *rapport*. Si l'on considère la différence, le rapport est dit *arithmétique;* si au contraire on considère le quotient,,il est dit *géométrique*. Ces deux noms sont impropres, car ces rapports ne sont ni plus arithmétiques ni plus géométriques l'un que l'autre; mais l'usage les ayant consacrés, il faut les adopter; cependant il conviendrait mieux d'appeler le premier rapport de *différence* et le second rapport de *contenance*. Chacun des nombres qui composent un rapport s'appelle *terme* ou *membre;* le premier s'appelle *antécédent* et le second *conséquent*. Le résultat de la comparaison de deux nombres est la *raison;* dans le rapport 7 et 9, 7 est l'antécédent, 9 le conséquent et 2 la raison.

(155) Entre 4 et 6 la raison est 2, c'est donc un rapport arithmétique; mais on voit qu'un rapport arithmétique n'est autre chose qu'une soustraction, et que la *raison* en est la différence. D'après cela, si l'on ajoute à chaque terme la même quantité, le rapport ne doit pas changer; les termes ont changé, mais le rapport qui existe entre les deux nombres est le même. Par exemple, si à 4 et 6 on ajoute 5, on aura 9 et 11 dont la raison est la même que dans le rapport précédent. Cela est évident, puisque nous

avons vu que dans la soustraction la différence est toujours la même lorsqu'on ajoute ou lorsqu'on retranche la même quantité des deux nombres. Ainsi l'on peut dire que lorsqu'on ajoute la même quantité à l'antécédent et au conséquent d'un rapport, ce rapport reste le même.

A quelle opération correspond le rapport géométrique? Il est évident que, puisque l'on considère le quotient, ce rapport est une véritable division et doit en avoir les propriétés. Ainsi nous avons vu qu'on pouvait multiplier ou diviser le dividende et le diviseur par un même nombre sans changer le quotient; donc en multipliant par un même nombre les deux termes d'un rapport géométrique, le rapport n'a point changé.

(156) Dans le rapport 3 et 5 la raison est 2; elle est de même 2 dans le rapport 7 et 9. Il y a donc égalité entre ces deux rapports; c'est pourquoi l'on peut dire que 3 se rapporte à 5 comme 7 se rapporte à 9. Ces deux rapports égaux forment ce qu'on appelle une proportion et s'écrivent ainsi : 3 . 5 : 7 . 9, ce qui veut dire 3 est à 5 comme 7 est à 9. Cette proportion est dite arithmétique, parce que les rapports sont arithmétiques.

(157) Si les rapports sont géométriques, la proportion est dite géométrique. Par exemple 3 et 6 et 4 et 8 forment une proportion, parce que les rapports sont égaux; mais 3 et 6 et 4 et 12 ne forment pas une proportion, parce que l'une des *raisons* est 2 et l'autre 3.

Les proportions géométriques s'écrivent ainsi : 3 : 6 : : 4 : 8, ce qui veut dire 3 est à 6 comme 4 est à 8.

Les deux termes qui sont au milieu s'appellent termes moyens, et ceux qui sont aux extrémités extrêmes. Dans la proportion précédente 6 et 4 sont les moyens et 3 et 8 les extrêmes.

3 est l'antécédent du premier rapport et on l'appelle *premier antécédent;* l'antécédent du second rapport, qui est ici 4, s'appelle *second antécédent.* 6 est le *premier conséquent* et 8 le *second conséquent.*

(158) — Si un ouvrier fait en un certain temps 10 mètres d'ouvrage; combien 3 ouvriers en feront-ils dans le même temps?

Il est évident que plus il y a d'ouvriers, plus l'ouvrage est considérable; si au contraire il y a moins d'ouvriers, l'ouvrage sera moindre. Il est encore évident qu'il doit y avoir le même rapport entre le nombre de mètres cherché et le premier nombre de mètres qu'entre le premier et le second nombre d'ouvriers; c'est-à-dire que s'il y a le double d'ouvriers, l'ouvrage sera deux fois aussi considérable, et s'il y a la moitié moins d'ouvriers, l'ouvrage sera réduit à moitié. En effet, puisque dans la question ci-dessus le premier nombre d'ouvriers est 1 et le second 3, le premier nombre de mètres est 10, le second doit être trois fois autant ou 30. Ces quatre nombres forment une proportion géométrique.

1 : 3 : : 10 : 30.

Remarquez que dans cette proportion on place dans chaque rapport les quantités de même nature. Dans le premier on compare les deux nombres d'ouvriers, et dans le second les deux ouvrages.

— Si 4 aunes coûtent 7 fr.; combien coûteront 16 aunes?

Cette question forme encore une proportion. Le second nombre d'aune étant quadruple du premier, le second prix doit être aussi quadruple du premier, on aura donc $4 : 16 :: 7 : x$ ou $4 : 16 :: 7 : 28$.

(159) On voit, d'après cela, qu'on peut toujours trouver le quatrième terme d'une proportion, quand on en connaît trois et le rapport qu'il y a entre les deux premiers. Mais ce rapport n'est pas toujours aussi facile à reconnaître que dans ces questions; c'est pourquoi il est nécessaire d'avoir une formule que nous expliquerons plus tard. Tel est le but et l'usage des proportions.

On s'exercera à mettre en proportion les questions suivantes, en remplaçant par un x le terme inconnu.

1° Une livre a 16 onces; combien 6 livres en contiennent-elles?

2° Si un litre coûte 12 fr., combien coûteront 16 litres?

3° Si 6 mètres coûtent 12 fr., combien coûteront 8 mètres?

4° Si 10 ouvriers font 22 toises, combien 15 ouvriers en feront-ils?

5° Si 3 aunes coûtent 9 fr., combien coûteront 15 aunes?

6° Si 5 litres coûtent 10 fr., combien coûteront 11 litres?

Propriétés des proportions.

$$3 \,.\, 5 : 7 \,.\, 9.$$

(160) Une proportion quelconque consiste dans l'égalité des rapports, quels que soient ces derniers. Or, lors même qu'on changerait les termes d'un rapport, la proportion subsistera toujours si le nouveau rapport est égal au premier. Prenons la proportion ci-dessus et ajoutons aux termes 3 et 5 un nombre quelconque, par exemple 6, nous aurons $9 \,.\, 11 : 7 \,.\, 9$. La proportion existe toujours, puisque les rapports sont égaux. On pourrait de même retrancher un nombre de deux termes sans altérer la proportion.

La raison même peut changer, que la proportion subsistera toujours, si elle change également dans les deux rapports. Ainsi on peut changer les moyens de place et dire : $3 \,.\, 7 : 5 \,.\, 9$, ce qui forme toujours une proportion, quoique la raison soit 4 au lieu d'être 2.

On pourrait enfin ajouter une même quantité aux deux antécédents ou aux deux conséquents, ou la retrancher sans changer la proportion.

D'après cela on voit donc que, puisqu'une proportion consiste uniquement dans l'égalité des rapports, il importe de s'assurer de cette égalité; nous allons donner le moyen de la reconnaître. Dans les proportions arithmétiques sans fractions, elle est facile à observer; mais il n'en est pas de même lorsqu'il y a des fractions ou lorsque la proportion est géométrique.

(161)
$$\begin{array}{l} 7 \,.\, 10 : 11 \,.\, 14 \\ 8 \,.\, 13 : 9 \,.\, 14 \\ \hline 5 \,.\, 8 : 10 \,.\, 15 \\ 8 \,.\, 12 : 9 \,.\, 11 \end{array}$$

Il est évident que les deux premières proportions ci-dessus sont exactes et que les deux secondes sont fausses. Or si l'on compare dans les deux premières la somme des termes moyens à celle des extrêmes, on trouvera qu'elles sont égales. En effet $10 + 11 = 21$, $7 + 14 = 21$. $13 + 9 = 22$, $8 + 14 = 22$. Dans les deux dernières qui sont fausses, la somme des moyens n'est pas égale à celle des extrêmes.

De cette observation on conclut qu'une proportion arithmétique est exacte lorsque la somme des moyens est égale à la somme des extrêmes, et qu'elle est fausse dans le cas contraire. Telle est la principale propriété des proportions arithmétiques.

(162) La raison de cette propriété est facile à saisir. Soit la proportion $7 \,.\, 10 : 11 \,.\, 14$; la *raison* en est 3. Si l'on ajoute ce nombre aux deux plus petits termes, on aura $10 \,.\, 10 : 14 \,.\, 14$, proportion évidemment exacte et dont il est évident que la somme

des moyens est égale à la somme des extrêmes ; car $10 + 14 = 10 + 14$; mais quel nombre avons-nous ajouté aux plus petits termes? c'est la raison 3. Or les deux antécédents se composent donc ainsi : $7 + 3$ et $11 + 3$. On peut donc écrire la proposition sous cette forme :

$$7 + 3 . 10 : 11 + 3 . 14.$$

La somme des moyens est $10 + 11 + 3$ ou 24, et celle des extrêmes $7 + 3 + 14$ ou 24. La différence entre ces deux sommes est zéro. Si de chacune de ces deux sommes on retranche la même quantité 3 (quantité que l'on a ajoutée et qui n'appartient point à la proportion), il reste 21 pour chacune ; car lorsque de deux quantités égales on retranche la même quantité, il y a toujours égalité entre ces deux quantités.

De cette observation on conclut que, puisqu'en ajoutant *la raison* aux deux plus petits termes on a rendu évidente l'égalité de la somme des extrêmes et de celle des moyens, qu'il est prouvé mathématiquement qu'en retranchant cette même *raison* des deux sommes, l'égalité doit subsister, on en conclut, dis-je, que *dans toute proportion arithmétique la somme des moyens est égale à la somme des extrêmes.*

(163) Lorsque dans une proportion quelconque les deux termes moyens sont égaux, cette proportion est appelée *continue.* Ainsi 7 . 10 : 10 . 13 est une proportion arithmétique continue ; 3 : 9 : : 9 : 27 est une proportion géométrique continue. Par abrévia-

tion on les écrit ainsi : $\div 7 . 10 . 13$ et pour la seconde $\div\div 3 : 9 : 17$. Le signe placé au commencement indique que la proportion est continue et que par conséquent le terme moyen est censé être répété deux fois.

Puisque, d'après la propriété que nous venons de reconnaître, la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens (dans une proportion arithmétique), il suit que dans une proportion continue la somme des extrêmes est double du terme moyen, ou que le terme moyen est la moitié de la somme des extrêmes. D'après cela, si l'on veut trouver un *moyen* arithmétique entre deux nombres, c'est-à-dire si l'on veut trouver un nombre qui soit le terme moyen d'une proportion arithmétique continue dont on a les extrêmes, il faut prendre la moitié de la somme de ces extrêmes. Ainsi, si l'on veut trouver un moyen arithmétique entre 8 et 19, on prendra la moitié de $8 + 19$ ou de 27 qui est $13\frac{1}{2}$ et l'on aura $\div 8 . 13\frac{1}{2} . 19$ ou $8 . 13\frac{1}{2} : 13\frac{1}{2} . 19$.

Les proportions arithmétiques ne sont pas d'une aussi grande utilité que les proportions géométriques, c'est pourquoi nous ne nous étendons pas davantage sur leurs propriétés; mais nous donnerons plus de détails sur ces dernières, parce que leur usage est bien plus étendu.

(164)
$$\begin{array}{c} 3 : 9 :: 5 : 15 \\ 5 : 10 :: 4 : 8 \\ \hline 7 : 14 :: 3 : 12 \\ 5 : 15 :: 2 : 8 \end{array}$$

Les deux premières proportions sont évidemment exactes et les deux dernières évidemment fausses; mais comme nous l'avons dit, le rapport n'étant pas toujours aussi facile à observer, il faut un moyen de s'assurer de l'exactitude d'une proportion. Si l'on compare dans les proportions précédentes le produit des termes moyens et celui des extrêmes, on verra que dans les deux premières ces produits sont égaux et qu'ils ne le sont pas dans les deux secondes. En effet $9 \times 5 = 45$, $3 \times 15 = 45$. $10 \times 4 = 40$, $8 \times 5 = 40$.

De cette observation on conclut qu'une proportion géométrique est exacte lorsque le produit des moyens est égal au produit des extrêmes et qu'elle est fausse dans le cas contraire, c'est-à-dire qu'alors il n'y a pas égalité entre les rapports.

La démonstration de ce principe est fondée sur cet axiome : si l'on divise ou si l'on multiplie par le même nombre deux quantités égales, le résultat est de même deux quantités égales.

D'après cela, soit la proportion 5 : 20 : : 4 : 16, *la raison* est 4; si on multiplie par cette *raison* 4 les deux plus petits termes, on aura 20 : 20 : : 16 : 16, proportion évidemment exacte; il est en outre évident que le produit des moyens est égal au produit des extrêmes; ces deux produits sont chacun 320. Mais si on les divise par 4 on aura pour chacun 80, suivant l'axiome ci-dessus énoncé. Or en divisant les deux produits 320 par 4, on ramène la proportion à son état primitif.

On conclut de ce raisonnement que, puisqu'en multipliant les deux plus petits termes par la *raison* 4, on a obtenu une proportion dans laquelle il était évident que le produit des extrêmes était égal au produit des moyens; que, puisqu'en divisant les deux produits par cette même raison 4, il est prouvé mathématiquement que l'égalité doit encore subsister, on conclut, dis-je, qu'elle subsistait également avant de multiplier par la raison. *Donc dans toute proportion géométrique le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

(165) Ce principe a conduit à la manière de trouver le quatrième terme d'une proportion géométrique lorsqu'on connaît les trois autres. Soit la question suivante à résoudre :

— Si 8 aunes d'étoffe coûtent 16 fr., combien coûteront 20 aunes?

Cette question donne la proportion suivante :

$$8 : 20 :: 16 : x.$$

On sait que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Ainsi puisque $20 \times 16 = 320$, $8 \times x = 320$. On trouvera donc la valeur de x ou du nombre par lequel il faut multiplier 8 pour avoir 320, en divisant ce nombre par 8; en effet on trouve 40, on aura donc la proportion $8 : 20 :: 16 : 40$ par laquelle on voit que les 20 aunes coûteront 40 fr.

De cette démonstration on conclut que pour trouver le quatrième terme d'une proportion il suffit de multiplier les deux moyens et de diviser le produit par l'extrême connu.

Si c'était un terme moyen qui fût inconnu comme dans cette proportion : $8 : 20 :: x : 40$, il faudrait multiplier les deux extrêmes et diviser le produit par le moyen connu.

C'est sur ce principe qu'est fondé l'usage des proportions ; mais il peut présenter plusieurs cas que nous examinerons à l'article de la règle de trois. Les proportions ont encore plusieurs propriétés que nous allons examiner.

(166) — Soit la proportion $9 : 12 :: 6 : 8$, on demande si en multipliant ou en divisant par un nombre quelconque les deux antécédents ou les deux conséquents la proportion subsistera toujours ?

1° En multipliant les deux antécédents par 3, par exemple, on aura $27 : 12 :: 18 : 8$. Le produit des moyens et celui des extrêmes étant égaux, on en conclut que la proportion est exacte ; mais on peut s'en assurer par le raisonnement suivant : en multipliant le premier antécédent par 3, on a rendu le produit des extrêmes 3 fois aussi grand qu'il ne devrait être, et en multipliant le second antécédent par 3, on a de même rendu le produit des moyens 3 fois aussi grand, donc l'égalité doit encore subsister.

2° En divisant les deux antécédents par 3, par exemple, on aura $3 : 12 :: 2 : 8$, proportion exacte, parce que le produit des moyens est égal au produit des extrêmes. On le prouve encore par un raisonnement analogue au précédent ; mais au lieu de rendre les produits plus grands on les rend 3 fois plus petits.

3° En multipliant les conséquents par 4, par exemple, on aura 9 : 48 : : 6 : 32. En les divisant au contraire par 4, on aura 9 : 3 : : 6 : 2 ; ces deux dernières proportions sont exactes, ce dont on peut s'assurer par les moyens que nous avons indiqués.

4° On peut encore multiplier ou diviser les deux termes d'un rapport sans altérer la proportion. Ainsi, soit la question suivante à résoudre : 200 *aunes d'étoffe ont coûté* 1500 *fr.; combien coûteront* 300 *aunes?* on aura la proportion :

$$200 : 300 :: 1500 : x = 2250$$
$$\text{ou } 2 : 3 :: 1500 : x = 2250$$
$$\text{ou } 2 : 300 :: 15 : x = 2250.$$

On ne pourrait pas retrancher les deux zéros des trois termes connus, ce qui donnerait évidemment un résultat faux; on ne pourrait pas non plus les retrancher des deux termes moyens.

(167) — Si 5 ouvriers font 15 toises d'ouvrage, 20 ouvriers en feront 60. On a la proportion:

$$5 : 20 :: 15 : 60,$$

parce que le plus petit nombre d'ouvriers se rapporte au plus grand nombre d'ouvriers, comme le plus petit ouvrage se rapporte au plus fort. On peut encore dire : Le plus grand nombre d'ouvriers est au plus petit comme le plus grand ouvrage se rapporte au plus faible. On aura:

$$20 : 5 :: 60 : 15.$$

On peut encore dire : Le plus faible ouvrage est au plus fort comme le plus petit nombre d'ouvriers est au plus grand; ou le plus fort ouvrage est au plus faible comme le plus grand nombre d'ouvriers est au plus petit. De là les proportions :

$$15 : 60 :: 5 : 20.$$

$$\text{ou } 60 : 15 :: 20 : 5.$$

Cette même proportion peut encore subir les changements suivants, sans que pour cela elle soit détruite, ce dont on peut s'assurer par le moyen connu.

$$5 : 15 :: 20 : 60$$
$$60 : 20 :: 15 : 5$$
$$20 : 60 :: 5 : 15$$
$$15 : 5 :: 60 : 20.$$

On conclut de là, que *dans toute proportion on peut sans l'altérer*, 1° *mettre les extrêmes à la place des moyens* et vice versâ ; 2° *changer la place des moyens ou celle des extrêmes.*

(168) Du principe précédent on déduit celui-ci : que dans toute proportion le premier antécédent est au second antécédent comme le premier conséquent est au second conséquent.

(169) *Autre principe.* La somme des termes du premier rapport est à la somme des termes du second rapport comme le premier antécédent est au second antécédent, ou comme le premier conséquent est au second. Exemple :

$$3 : 9 :: 5 : 15.$$

$$3 + 9 : 5 + 15 :: 3 : 5 \text{ ou } 12 : 20 :: 3 : 5.$$

(170) *Autre principe.* La différence des termes du premier rapport est à la différence des termes du second rapport comme le premier antécédent au second, ou comme le premier conséquent au second. Exemple :

$$3 : 9 :: 5 : 15$$

$$9 - 3 : 15 - 5 :: 3 : 5 \text{ ou } 6 : 10 :: 3 : 5.$$

(171) *Autre principe.* La somme des antécédents et la somme des conséquents forment un troisième rapport égal aux deux premiers. Exemple :

$$3 : 9 :: 5 : 15.$$

$3 + 5 = 8$; $9 + 15 = 24$. Il y a le même rapport entre 8 et 24 qu'entre 3 et 9 et entre 5 et 15.

(172) *Autre principe.* La différence des antécédents et la différence des conséquents forment un troisième rapport égal aux deux premiers. Exemple précédent. $5 - 3 = 2$; $15 - 9 = 6$. Il y a entre 2 et 6 le même rapport qu'entre 3 et 9 et entre 5 et 15.

(173) *Autre principe.* La somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un antécédent est à son conséquent. Il en est de même de la différence. Exemple précédent.

$3 + 5 : 9 + 15 :: 3 : 9$	$5 - 3 : 15 - 9 :: 3 : 9$
ou $8 : 24 :: 3 : 9$	ou $2 : 6 :: 3 : 9$

(174) *Autre principe.* Dans une suite de rapports égaux, la somme de tous les antécédents est à la somme de tous les conséquents comme un antécédent à son conséquent. Exemple :

$$3 : 9 :: 4 : 12 :: 5 : 15 :: 6 : 18.$$

$$3 + 4 + 5 + 6 : 9 + 12 + 15 + 18 :: 3 : 9.$$

$$\text{ou } 18 : 54 :: 3 : 9.$$

(175) *Autre principe.* Si l'on multiplie chaque terme d'une proportion par chaque terme d'une autre proportion, les quatre nombres qui en résultent sont en proportion. Exemple :

$$\begin{array}{r} 3 : 9 :: 4 : 12 \\ \times\ 5 : 20 :: 2 : 8 \\ \hline 15 : 180 :: 8 : 96 \end{array}$$

(176) Le rapport qui résulte de la multiplication de deux rapports terme à terme s'appelle *rapport composé* ; ainsi le rapport 15 : 180 est un rapport composé, parce qu'il résulte de la multiplication des deux rapports 3 : 9 et 5 : 20. Il est dit doublé, parce qu'on n'a multiplié que deux rapports ; si l'on multipliait encore le rapport 15 : 180 par un autre rapport, le résultat serait un rapport triplé, etc. La *raison* du rapport 15 : 180 est la même que si l'on multipliait la raison des rapports composants 3 : 9 et 5 : 20.

(177) *Autre principe.* Les carrés et les cubes de quatre nombres en proportion forment aussi une proportion. Ce principe est anticipé, attendu que l'élève ne connaît pas encore les racines carrées ni les racines cubiques ; mais nous reviendrons là-dessus lorsque nous traiterons cette partie.

Théorie des rapports et des proportions.

(178) Deux quantités mises en comparaison forment un *rapport;* le résultat de cette comparaison s'appelle *raison.*

On peut comparer deux quantités de deux manières : 1° en cherchant de combien l'une surpasse l'autre; 2° en cherchant combien l'une est contenue de fois dans l'autre. Dans le premier cas le rapport est dit arithmétique, et dans le second géométrique. Les deux nombres qui composent un rapport s'appellent *termes*, le premier se nomme *antécédent,* et le second *conséquent.*

On ne change point un rapport arithmétique en ajoutant la même quantité à ses deux termes ou en la retranchant.

On ne change point un rapport géométrique en multipliant ou en divisant les deux termes par un même nombre.

La comparaison de deux rapports égaux s'appelle une *proportion.* Une proportion peut être arithmétique ou géométrique. Exemples :

5 . 8 : 7 . 10 est une proportion arithmétique.

5 : 10 : : 6 : 12 est une proportion géométrique.

Les deux termes du milieu se nomment les moyens, et ceux qui sont aux extrémités les extrêmes. Le premier terme se nomme premier antécédent, le second premier conséquent. Le troisième se nomme second antécédent, et le quatrième second conséquent.

Lorsque dans une proportion quelconque les deux termes moyens sont égaux, la proportion est appelée continue. Elles s'écrivent ainsi par abréviation : $\div$ 7 . 10 . 13 et $\div\!\!:$ 3 : 9 : 27. Dans une proportion arithmétique continue, le terme moyen est la moitié de la somme des extrêmes.

Une proportion consiste uniquement dans l'égalité des rapports; or tout changement survenu dans la proportion qui ne trouble point cette égalité ne change pas la proportion.

La propriété fondamentale des proportions arithmétiques est que la somme des moyens est égale à la somme des extrêmes. Par ce moyen on s'assure de l'exactitude d'une proportion arithmétique.

La propriété fondamentale des proportions géométriques est que le produit des moyens est égal au produit des extrêmes. Par ce moyen on s'assure de l'exactitude d'une proportion géométrique.

Cette propriété a conduit au moyen de trouver un terme quelconque d'une proportion lorsqu'on connaît les trois autres. Si c'est un des extrêmes qui soit inconnu, on multiplie les deux termes moyens, et l'on divise le produit par l'extrême connu : le résultat est le terme inconnu. Si au contraire c'est un des moyens qui soit inconnu, on multiplie les deux extrêmes, et l'on divise par le moyen connu (165).

Les principes suivants sont fondés sur ce qui a précédé, et l'on peut s'assurer que les changements que l'on fait subir à une proportion ne la détruisent point par le principe énoncé plus haut, que le produit des moyens doit toujours être égal à celui des extrêmes.

1° On peut, sans détruire la proportion, mettre les moyens à la place des extrêmes *et vice versâ*, et changer la place des moyens ou celle des extrêmes (167).

2° On peut multiplier ou diviser par un même nombre les deux antécédents ou les deux conséquents, ou les deux termes d'un rapport, ou enfin les quatre termes de la proportion (166).

3° Dans toute proportion le premier antécédent est au second antécédent comme le premier conséquent est au second conséquent (168).

4° La somme ou la différence des termes du premier rapport est à la somme ou à la différence du second rapport comme le premier antécédent est au second antécédent (169, 170).

5° La somme ou la différence des antécédents et celle des conséquents forment un troisième rapport égal aux deux premiers (171, 172).

6° La somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un antécédent est à son conséquent (173).

7° Dans une suite de rapports égaux, la somme de tous les antécédents est à la somme de tous les conséquents comme un antécédent est à son conséquent (174).

8° Deux proportions multipliées l'une par l'autre, terme à terme, forment une troisième proportion (175).

9° Deux rapports multipliés l'un par l'autre, terme à terme, forment un troisième rapport qu'on appelle composé. La raison de ce rapport est égale au produit de la raison d'un des rapports facteurs, multipliée par la raison de l'autre rapport (176).

Questions sur les proportions.

(179) 1° Qu'est-ce qu'un rapport?

2° Qu'est-ce que la raison d'un rapport?

3° De combien de manières peut-on comparer deux quantités?

4° Qu'appelle-t-on rapport arithmétique et rapport géométrique?

5° A quelle opération répond le rapport arithmétique?

6° Démontrez qu'en ajoutant la même quantité aux deux termes d'un rapport arithmétique, ce rapport ne change pas.

7° A quelle opération répond le rapport géométrique?

8° Démontrez qu'en multipliant ou en divisant par le même nombre les deux termes d'un rapport géométrique, ce rapport ne change pas?

9° Qu'est-ce qu'une proportion?

10° Combien y a-t-il d'espèces de proportions?

11° Qu'est-ce qui constitue une proportion?

12° Comment s'assure-t-on de l'égalité des rapports dans les proportions arithmétiques?

13° Démontrez cette propriété de l'égalité de la somme des moyens et de celle des extrêmes?

14° Démontrez que la proportion ne change pas quand on ajoute la même quantité aux deux termes d'un rapport ou aux deux antécédents, ou aux deux conséquents, ou aux quatre termes?

15° Quelle est la propriété fondamentale des proportions géométriques? Démontrez-la.

16° Quelle autre propriété découle de celle de l'égalité entre le produit des extrêmes et celui des moyens? Démontrez-la.

17° Quel est le moyen de s'assurer de l'exactitude d'une proportion géométrique?

18° Démontrez qu'on peut, sans changer une proportion, transposer certains termes, et faites subir à la proportion suivante tous les changements dont elle est susceptible? $2 : 6 :: 4 : 12$.

19° Démontrez qu'on peut multiplier ou diviser certains termes sans changer une proportion, et quels sont ceux sur lesquels on peut faire ce changement?

20° Démontrez les divers autres principes relatifs aux proportions. (*Voy.* la théorie, page 251, pour l'énoncé des principes)

21° Qu'est-ce qu'un rapport composé?

22° Qu'y a-t-il à remarquer sur la raison d'un rapport composé?

Réponses aux questions précédentes.

1° C'est la comparaison de deux quantités.

2° C'est le résultat de la comparaison de deux quantités.

3°, 4°. Dans le rapport arithmétique, on considère la différence qu'il y a entre deux quantités, et dans le rapport géométrique on voit combien l'une est contenue de fois dans l'autre.

5°, 6°, 7°, 8°.

9° C'est la comparaison de deux rapports égaux.

10°, 11° L'égalité des rapports.

12° Par cette propriété de l'égalité de la somme des moyens et de celle des extrêmes.

13° (162), 14°.

15° L'égalité entre le produit des moyens et celui des extrêmes (164).

16° Le moyen de trouver un terme quelconque d'une proportion quand on connaît les trois autres (165).

17° Par l'égalité du produit des extrêmes et celui des moyens.

18° Changements dont est susceptible la proportion 2 : 6 : : 4 : 12.

1°	2	:	6	: :	4	:	12
2°	2	:	4	: :	6	:	12
3°	12	:	4	: :	6	:	2
4°	12	:	6	: :	4	:	2
5°	6	:	2	: :	12	:	4
6°	4	:	2	: :	12	:	6
7°	4	:	12	: :	2	:	6
8°	6	:	12	: :	2	:	4

19° (*Voy.* n° 166).

20° (*Voy.* n° 168 et suivants, pour la démonstration).

21° C'est un rapport résultant de la multiplication de deux autres rapports.

22° Elle est égale au produit des deux raisons des rapports composants.

§ XIII.

OPÉRATIONS DÉPENDANTES DES PROPORTIONS ET OPÉRATIONS DE COMMERCE.

Règle de trois.

(180) *Observation.* Les applications des proportions se trouvent renfermées dans les règles dépendantes de ces mêmes proportions.

— Si 15 aunes d'étoffe coûtent 33 fr., combien coûteront 20 aunes?

Dans cette question et dans toutes celles qui lui sont analogues, il s'agit de trouver un nombre d'après le rapport qui existe entre trois autres nombres connus, c'est pour cette raison qu'on appelle la règle par laquelle on le trouve *règle de trois*.

Dans les proportions nous avons proposé des questions analogues à la précédente, et nous avons commencé (158) à expliquer le rapport qui existe entre ces quatre nombres, qui forment entre eux la proportion suivante :

$$15 \text{ aunes} : 20 \text{ aunes} :: 33 \text{ fr.} : x.$$

En effet, plus il y a d'annes plus le prix cherché doit être fort. S'il y a le double de marchandises, le prix sera le double; s'il y en a la moitié, le prix sera aussi la moitié du prix précédent. En un mot il doit y avoir le même rapport entre les deux prix qu'entre les deux nombres d'aunes. C'est pourquoi il est nécessaire de faire entrer dans chaque rapport les quantités de mêmes espèces. Dans le premier on compare les deux nombres d'aunes, et dans le second les deux prix. Dans le second rapport il y a un terme inconnu que l'on trouvera par le moyen indiqué (n° 165) : on trouve 44. On peut s'assurer de l'exactitude de cette proportion par le moyen indiqué (n° 164), ou si l'on fait attention que le premier nombre d'aunes est les trois quarts du second, le premier prix doit être aussi les trois quarts du second. C'est ce qui a lieu en effet.

— Si 3 ouvriers font 36 toises d'ouvrage en un certain temps, combien 20 ouvriers en feront-ils?

Solution. 3 ouv. : 20 ouv. : : 36 t. : x t. $= 240$.

— Si 5 ouvriers font 24 toises, combien 2 ouvriers en feront-ils?

Solution. $5 : 2 :: 24 : x = 9\frac{3}{5}$.

— On a payé 25 fr. à 4 ouvriers pour un certain ouvrage; combien aurait-on payé 5 ouvriers?

4 ouv. : 5 ouv. : : 25 fr. : x fr.
ou 5 : 4 : : x : 25 $=$ 31 fr. 25 c.

Pour mettre une question en proportion, il faut observer la concordance qui existe entre les termes du second rapport et ceux du premier, sans cela on s'exposerait à des erreurs considérables.

Dans la question précédente, par exemple, remarquez que les 25 fr. correspondent aux 4 ouvriers; c'est pourquoi ils sont tous deux placés comme antécédents. Le nombre x de francs correspond au nombre 5 d'ouvriers; ils sont tous deux conséquents.

Dans la seconde proportion on a mis les 5 ouvriers comme premier antécédent, et le nombre x de fr. aussi comme antécédent.

De cette observation et de ce qui a précédé on conclut 1° qu'il faut mettre dans un même rapport les quantités de même nature; 2° qu'il faut mettre comme antécédents les deux quantités qui ont une certaine liaison entre elles. Il en est de même à l'égard des conséquents.

On peut remarquer encore que cette opération est conforme au raisonnement que nous avons fait dans le calcul de tête pour résoudre sans formule des questions de règles de trois. Voici ce raisonnement pour la question précédente.

— Si l'on paie 25 fr. pour 4 ouvriers, pour 1 ouvrier on paiera la quatrième partie de 25 fr. ou 6 fr. 25 cent., et pour 5 ouvriers on paiera 5 fois autant, ce qui donne 31 fr. 25 cent.

D'après ce raisonnement, on commence par prendre la quatrième partie, et l'on multiplie ensuite par 5. D'après la formule on multiplie d'abord par 5 et l'on prend ensuite la quatrième partie, ce qui est absolument la même chose.

On voit donc qu'on pourrait se passer de cette formule et résoudre les questions analogues d'après le raisonnement que nous venons d'indiquer, mais quelquefois cette formule est nécessaire. Les personnes qui ont suivi le second Cours doivent être en état de les résoudre par le seul raisonnement.

— 34 mètres d'étoffe coûtent 204 fr.; combien coûteront 20 mètres?

Solution par le raisonnement. Si 34 mètres coûtent 204 fr., 1 mètre doit en coûter la trente-quatrième partie ou 6 fr., et 20 coûteront 20 fois 6 fr. ou 120 fr.

Par la formule. 34 m. : 20 m. : : 204 fr. : x fr. $= 120$.

— Si 3 copistes font 34 pages en un certain temps, combien 7 copistes en feront-ils?

Solution par le raisonnement. Si 3 copistes font 34 pages, un copiste en fera le tiers ou 11 pages $\frac{1}{3}$, et 7 copistes en feront 7 fois autant ou 79 pages $\frac{1}{3}$.

Par la formule. 3 cop. : 7 cop. : : 34 pag. : x pag. $= 79\,\frac{1}{3}$.

— Une fontaine donne en un certain temps 30 voies d'eau par 4 tuyaux; combien en donnera-t-elle dans le même temps par 7 tuyaux?

Solution par le raisonnement. Par 1 seul tuyau elle fournira le quart de 30 voies ou 7 voies $\frac{1}{2}$, et par 7 tuyaux elle en fournira 7 fois autant, c'est-à-dire $7 \times 7\,\frac{1}{2}$ ou 52 voies $\frac{1}{2}$.

Par la formule. 4 tuy. : 7 tuy. : : 30 voies : x voies $= 52\,\frac{1}{2}$.

— Une personne lit 55 pages en une heure; en combien de temps lira-t-elle un volume de 500 pages?

Solution par le raisonnement. S'il lui faut une heure pour lire 55 pages, autant de fois 55 sera contenu dans 500 autant il lui faudra d'heures pour lire ce volume. $500 \mid 55 = 9\frac{5}{55}$ ou $\frac{1}{11}$.

Par la formule. 55 pag. : 500 pag. : : 1 heur. : x heur. $= 9\frac{1}{11}$. $500 \times 1 = 500 \mid 55 = 9\frac{1}{11}$.

(181) — 5 ouvriers font 24 toises $\frac{1}{2}$; combien 11 ouvriers en feront-ils?

Solution par le raisonnement. Si 5 ouvriers font 24 toises $\frac{1}{2}$, 1 seul ouvrier en fera la cinquième partie ou $4\frac{9}{10}$; 11 ouvriers en feront 11 fois autant. Le raisonnement étant le même pour toutes les questions analogues aux précédentes, je ne donnerai la solution par ce moyen que lorsqu'il différera.

Par la formule. 5 ouv. : 11 ouv. : : 24 t. $\frac{1}{2}$: x t.

On peut résoudre cette formule de deux manières, d'abord en multiplant $24\frac{1}{2}$ par 11, ce qui donne $269\frac{1}{2}$. Divisant ce produit par 5 on reçoit $53\frac{9}{10}$. La seconde manière est en réduisant les 24 toises $\frac{1}{2}$ en demies, ce qui donne 49 demies; mais pour les réduire en demies il a fallu multiplier ce nombre par 2; or on sait qu'on ne change pas une proportion en multipliant par le même nombre les deux antécédents. On multipliera donc le premier antécédent 5 par 2, et l'on aura pour proportion $10 : 11 :: 49 : x$, proportion égale à la première, et qui donne le même résultat.

En faisant ainsi disparaître les dénominateurs, on réduit la question à une simple proportion de nombres entiers.

— Si 7 aunes coûtent 136 fr, combien coûteront 5 aunes $\frac{3}{4}$?

Solution. 7 aunes : 5 aunes $\frac{3}{4}$: : 136 fr. : x fr.

ou 28 aun. : 23 aun. : : 136 fr. : x fr. $=$ 111 fr. 71 c.

— Si un copiste fait en 5 heures 30 pages $\frac{3}{4}$, combien en fera-t-il en 12 heures $\frac{1}{2}$?

Solution. 5 h. : 12 h. $\frac{1}{2}$: : 30 pag. $\frac{3}{4}$: x pag.

ou 40 h. : 25 h. : : 123 pag. : x pag. $= 76\frac{7}{8}$.

Après avoir réduit les 30 pages $\frac{3}{4}$ en quarts, il faut multiplier le premier antécédent par 4, afin de conserver l'équilibre dans tous les membres de la proportion, ce qui donne 20 : 12 $\frac{1}{2}$: : 123 : x.

Pour faire disparaître le dénominateur de 12 $\frac{1}{2}$, on réduit ce nombre en demies, et on multiplie le premier antécédent par 2, suivant le principe établi (nº 181).

— On a payé 6 fr. pour $\frac{3}{4}$ d'aune d'une étoffe; combien paiera-t-on pour $\frac{5}{8}$?

Solution. La longueur $\frac{3}{4}$ est à la longueur $\frac{5}{8}$ comme 6 fr. sont à x francs.

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{8} : : 6 \text{ fr.} : x \text{ fr.}$$

ou 24 : 20 : : 6 : x. *Rép.* 5 fr.

On peut multiplier les deux termes moyens $\frac{5}{8}$ et 6, ce qui donne $\frac{30}{8}$; divisé par $\frac{3}{4}$, on reçoit $\frac{120}{24}$ ou 5 entiers.

Mais on peut aussi réduire les deux fractions au même dénominateur, ce qui donne la proportion $\frac{24}{32} : \frac{20}{32} : : 6 : x$; mais comme il ne s'agit que de comparer les numérateurs, et que les dénominateurs sont égaux, on peut faire disparaître ceux-ci et avoir la proportion ci-dessus $24 : 20 :: 6 : x$.

— Si l'on avait cette proportion : $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} :: \frac{5}{6} : x$, au lieu de faire les opérations sur les fractions, on peut réduire les deux termes du premier rapport au même dénominateur, ce qui donne, en faisant disparaître ces dénominateurs, $9 : 8 :: \frac{5}{6} : x$. En ôtant le nominateur 6, on aura 5 entiers, nombre 6 fois aussi grand que $\frac{5}{6}$; il faut donc aussi multiplier le premier antécédent par 6, ce qui donne la proportion $54 : 8 :: 5 : x = \frac{40}{54}$ ou $\frac{20}{27}$.

Proportions à résoudre.

(182) $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} :: \frac{1}{6} : x$. ou $24 : 3 :: 1 : x$. *Rép.* $\frac{1}{8}$.
$\frac{3}{7} : \frac{4}{9} :: \frac{7}{12} : x$. *Rép* $\frac{196}{324}$. $3\frac{1}{4} : 4\frac{2}{3} :: \frac{1}{2} : x$. *Rép.* $\frac{56}{78}$.
$36,3 : 25,5 :: 7\frac{1}{3} : x$. ou $1089 : 255 :: 22 : x$.
$4\frac{3}{4} : 7\frac{1}{2} :: 5\frac{1}{3} : x$. $7,44 : 8,1 :: 100 . x$.
$56,004 : 62,24 :: 7,8 : x$. $0,4 : 0,05 :: 0,236 : x$.

Règle de trois inverse.

(183) Un équipage composé de 50 hommes a des provisions pour 30 jours; on demande combien de jours dureraient ces provisions s'il y avait 100 personnes?

Solution. Remarquez que dans cette question le nombre de jours cherché n'augmente pas en proportion du nombre d'hommes, mais au contraire il diminue; car il est certain que 100 hommes auront plus tôt consommé les vivres que 50 hommes. Ici le plus produit le moins, tandis que dans les autres questions le plus produit le plus. C'est ce qui distingue la règle de trois *inverse* de la règle de trois *directe*.

Elle ne présente aucune difficulté si on la raisonne de la manière suivante : le plus grand nombre d'hommes est au plus petit comme le plus grand nombre de jours est au plus petit, ce qui donne la proportion : $100 : 50 :: 30 : x = 15$.

En effet le nombre d'hommes étant double, les vivres dureront la moitié moins de temps, c'est ce qui a lieu.

La difficulté ne consiste que dans l'examen de la question. Observant toujours que chaque rapport doit être formé de deux quantités de même nature, il faut remarquer si la quantité cherchée doit être plus forte ou plus faible que la quantité de même espèce, ce qui détermine la position de x.

— Si 10 ouvriers font un certain ouvrage en 12 jours, en combien de jours 7 ouvriers l'auront-ils achevé ?

Solution. Le nombre de jours cherché doit être plus grand que le premier, parce que les ouvriers étant en plus petit nombre, doivent employer plus de temps ; on aura donc : le plus grand nombre d'ouvriers est au plus petit comme le plus grand nombre de jours est au plus petit. Sachant que x représente le plus grand nombre de jours, on aura :

$$10 : 7 :: x : 12. \textit{ Rép. } 17\tfrac{1}{7}.$$

— Une garnison de 1500 hommes a des vivres pour

20 jours ; il arrive 530 hommes de plus ; combien de temps dureront les vivres?

Solution. x représente le plus petit nombre de jours ; on aura donc :

1500 h. : 2030 h. : : x j. : 20 j. *Rép.* 14 jours et quelque chose.

— Une garnison de 1200 hommes a des vivres pour 15 jours ; il arrive un nouveau détachement, de sorte qu'il n'y a plus de vivres que pour 9 jours ; de combien d'hommes se composait ce détachement?

Solution. x représente un nombre d'hommes plus petit que le premier ; on aura donc : le plus grand nombre de jours 15 est au plus petit 9 comme le plus grand nombre d'hommes 1200 est au plus petit x. Cette règle de trois est directe.

15 : 9 : : 1200 : x. *Rép.* 720.

— Une garnison composée de 2000 hommes a des vivres pour 30 jours ; il arrive un détachement de 500 hommes ; pour combien de temps reste-t-il encore de vivres?

Solution. x représente le plus petit nombre de jours, on aura donc :

2000 h. : 2500 h. : : x : 30. *Rép.* 24 jours.
ou 20 h. : 25 : : x : 30.

— Une garnison de 1500 hommes a des vivres pour 20 jours. Chaque ration est de 24 onces. Il arrive un détachement de 600 hommes ; on demande à combien il faut réduire la ration pour que les vivres durent également 20 jours?

Solution. x représente la plus petite ration, donc le plus petit nombre d'hommes 1500 est au plus grand nombre 2100 comme la plus petite ration x est à la plus forte 24.

$$1500 : 2100 :: x : 24$$

ou $15 : 21 :: x : 24$. *Rép.* 17 onc. 2 gr. $\frac{1}{7}$.

— Il faut pour une robe 6 aunes d'une étoffe large de $\frac{3}{4}$; combien en faudrait-il d'une autre étoffe large de $\frac{5}{12}$?

Solution. Moins l'étoffe est large plus il en faut. x représentant la longueur de l'étoffe de $\frac{5}{12}$, c'est-à-dire la moins large, doit représenter la plus grande longueur; on aura donc : la plus grande largeur $\frac{3}{4}$ est à la plus petite largeur $\frac{5}{12}$ comme la plus grande longueur x est à la plus petite longueur 6.

$$\tfrac{3}{4} : \tfrac{5}{12} :: x : 6$$

ou $36 : 20 :: x : 6$. *Rép.* 10 $\frac{4}{5}$.

— Il faut pour une tenture 12 mètres d'étoffe large de $\frac{5}{8}$; combien en faudrait-il d'une étoffe large de $\frac{9}{16}$?

Solution. La plus grande largeur $\frac{5}{8}$ est à la plus petite $\frac{9}{16}$ comme la plus grande longueur x est à la plus petite longueur 12 mètres.

$$\tfrac{5}{8} : \tfrac{9}{16} :: x : 12$$

ou $10 : 9 :: x : 12$. *Rép.* 13 $\frac{1}{3}$.

— 25 hommes ont fait 60 toises d'ouvrage en 10 jours; combien de temps 18 hommes emploieront-ils à faire le même ouvrage? (Le jour de 12 heures.)

Solution. Le plus grand nombre d'hommes 25 est au plus petit 18 comme le plus grand nombre de jours x est au plus petit 10.

$$25 : 18 :: x : 10.$$ *Rép.* 13 jours 10 h. $\frac{2}{3}$.

Règle de trois composée.

(184) — 8 hommes ont fait 20 toises d'ouvrage en travaillant 7 jours; combien 10 hommes en feront-ils en 12 jours?

Solution. Chaque nombre de toises dépend du nombre d'hommes et du nombre de jours, d'où l'on voit que les deux termes du premier rapport se composent chacun de deux nombres.

8 h. 7 j. : 10 h. 12 j. : : 20 t. : x.

Mais remarquez que si 8 hommes font 20 toises en 7 jours, pour faire le même ouvrage en 1 jour il faudra 7 fois autant d'ouvriers, c'est-à-dire 54. Il est donc indifférent de dire 54 ouvriers font en 1 jour 20 toises, ou 8 ouvriers font en 7 jours 20 toises. Les 8 hommes 7 jours peuvent donc être remplacés par 54. Si 10 ouvriers font en 12 jours x toises, pour faire le même ouvrage en 1 jour il faudra 12 fois autant d'ouvriers, c'est-à-dire 120. On peut donc remplacer 10 hommes 12 jours par 120, et avoir la proportion

$54 : 120 :: 20 : x$. *Rép.* 44 toises 2 pieds 8 pouces.

Pour faire la preuve de cette opération il faut que 44 toises 2 pieds 8 pouces, multiplié par 54, donne le même produit que 120 multiplié par 20. A cet effet on réduit le quatrième terme en pouces, ce qui donne 3200 pouces. $3200 \times 54 = 172800$. Mais pour réduire les toises en pouces on a multiplié d'abord par 6 et ensuite par 12; il faut donc, d'après le n° (166), multiplier aussi le premier conséquent par 6 et par 12, ce qui donne 8640. $8640 \times 20 = 172800$.

— 34 ouvriers ont fait 329 mètres d'ouvrage en 6 jours; combien 25 ouvriers en feront-ils en 8 jours?

Solution. 34 ouvriers en 6 jours = 204 ouvriers en 1 jour; 25 ouvriers en 8 jours = 200 ouvriers en 1 jour.

$$204 : 200 :: 329 : x = 322^{\text{mèt.}},549.$$

— 3 copistes font en 5 jours 150 pages; combien 10 copistes en feront-ils en 3 jours?

Solution. 3 copistes en 5 jours = 15 copistes en 1 jour; 10 copistes en 3 jours = 30 copistes en 1 jour.

$$15 : 30 :: 150 : x = 300 \text{ pages.}$$

— 4 copistes font 97 pages en 3 jours en travaillant 5 heures par jour; combien 5 copistes en feront-ils en 4 jours en travaillant 2 heures par jour?

Solution. Si 4 copistes font 97 pages en 3 jours et en travaillant 5 heures par jour, pour faire le même ouvrage en 1 jour il faudra 3 fois autant de copistes, c'est-à-dire 12. Pour faire le même ouvrage en 1 heure, il faudra 5 fois autant de copistes qu'il en faut pour faire l'ouvrage en 1 jour, c'est-à-dire 60. Le premier terme de la proportion est donc 60.

Par le même raisonnement on trouvera que 5 copistes en 4 jours, et en travaillant 2 heures par jour, sont la même chose que 40 copistes en 1 heure.

$$60 : 40 :: 97 : x = 64\tfrac{2}{3}.$$

D'après ces différentes observations on voit que lorsqu'un des membres de la proportion est exprimé par plusieurs nombres, on ramène l'opération à une règle de trois simple en multipliant entre eux les nombres qui forment un même terme.

— 6 ouvriers font en 1 jour, en travaillant 8 heures, 24 mètres d'ouvrage; combien 4 ouvriers en feront-ils en 3 jours et en travaillant 5 heures par jour?

Solution. 6 ouv. en 8 h. : 4 ouv. en 3 j. 5 h. par j. :: 24 mèt. : x.

$$48 : 60 :: 24 : x = 30 \text{ mètres.}$$

— 7 ouvriers ont fait 40 mètres d'ouvrage en 8 jours et en travaillant 11 heures par jour; combien 10 ouvriers en feront-ils par heure?

Solution. 7 ouvr. en 8 jours 11 heures par jour : 10 ouvr. :: 40 mètres : x. Ou :

$$616 : 10 :: 40 : x = \tfrac{50}{77} \text{ ou } 0^{m.},649.$$

— 3 ouvriers font en 4 jours, et en travaillant 5 heures par jour, 7 toises 4 pieds 9 pouces d'ouvrage; combien 4 ouvriers en feront-ils en 5 jours et en travaillant 4 heures par jour?

Solution. 3 ouvr. en 4 jours 5 heures par jour = 60 ouvr. en 1 heure; 4 ouvr. en 5 jours 4 heures par jour = 80 ouvr. en 1 heure; 7 toises 4 pieds 9 pouces = 561 pouces.

$$60 : 80 :: 561 : x.$$

Remarquez bien qu'on trouvera pour résultat des pouces et non des toises. Si l'on voulait de suite avoir les toises, il faudrait multiplier le premier terme de la proportion par 6 et par 12, afin de ne pas troubler la proportion.

(185) — 3 copistes ont fait en 8 jours 50 pages; en combien de jours 5 copistes feront-ils 100 pages?

Solution. x représente le nombre de jours employés par 5 copistes. 3 copistes en 8 jours = 24 copistes en 1 jour; 5 copistes en x jours = $5 \times x$ copistes en 1 jour.

$$24 \text{ copistes} : 5 \times x \text{ copistes} :: 50 : 100.$$

Si l'on avait la valeur totale de $5 \times x$, il serait facile de trouver celle de x en divisant la somme par 5. Or on trouvera cette valeur en multipliant les deux extrêmes 24 et 100, et divisant le produit par le moyen connu 50, ce qui donne 48 pour valeur de $5 \times x$. En divisant 48 par 5, on trouve pour réponse à la question 9 jours $\frac{3}{5}$.

— 4 tisserands font en 24 jours, et en travaillant 12 heures par jour, 100 mètres de toile; 6 autres tisserands ont fait en 30 jours 200 mètres de toile; on demande combien ils ont travaillé d'heures par jour?

Solution. $4 \times 24 \times 12 : 6 \times 30 \times x :: 100 : 200.$

$$\text{ou } 1152 : 180 \times x :: 100 : 200.$$

$$\text{ou } 1152 : 180 \times x :: 1 \quad : 2.$$

Multipliant les deux extrêmes et divisant par le moyen connu 1, on reçoit 2304 pour valeur de 180 $\times x$. Divisant ce nombre par 180, on trouve 12 h. 48 min. pour la valeur de x.

— Un propriétaire veut faire entourer son champ d'un fossé qui doit avoir 300 mètres de long sur 3 de largeur et 2 de profondeur : il s'adresse à un entrepreneur qui lui demande 8 fr. par jour; il emploiera 7 ouvriers travaillant 5 heures par jour et qui achèveront l'ouvrage en 16 jours.

Il s'adresse à un autre entrepreneur qui lui demande 9 fr. par jour; il emploiera 4 ouvriers travaillant 10 heures par jour. Lequel des deux doit-il accepter?

Solution. Si l'on connaissait le nombre de jours employés par le second entrepreneur, la réponse serait facile; il faut donc chercher ce nombre de jours par la proportion suivante.

7 ouvriers travaillant 5 heures : 4 ouvriers travaillant 10 heures : : x jours : 16 jours.

ou 35 ouvr. : 40 ouvr. : : x j. : 16 j. = 14 jours.

Remarquez ici que cette règle de trois est inverse, puisque plus il y a d'ouvriers, moins il faut de jours; on raisonnera donc ainsi la proportion. Le plus petit nombre d'ouvriers est au plus grand comme le plus petit nombre de jours x est au plus grand. Donc en acceptant la première proposition il paiera : 16 $\times$

8 = 128 fr., et en acceptant la seconde : $14 \times 9 =$ 126 fr.

— Si un voyageur fait 80 lieues en 8 jours, en marchant 5 heures par jour, combien en fera-t-il en 11 jours en marchant 4 heures par jour?

Solution par le seul raisonnement. En un jour il fera la huitième partie de 80 lieues ou 10 lieues, et en 1 heure il fera la cinquième partie de 10 lieues ou 2 lieues. En 4 heures il fera 4 fois 2 lieues ou 8 lieues, et en 11 jours il fera 11 fois 8 lieues ou 88 lieues.

— On a payé 128 fr. 44 c. à 12 ouvriers qui ont travaillé pendant 7 jours 5 heures par jour; combien paiera-t-on à 15 ouvriers travaillant pendant 8 jours 2 heures par jour?

Solution. 420 : 240 : : 128 fr. 44 cent. : x.

— 10 ouvriers ont fait en 3 jours, en travaillant 6 heures par jour, un fossé de 30 mètres de longueur, 3 mètres de largeur et 2 mètres de profondeur; combien faudra-t-il d'ouvriers pour faire en 6 jours, et en travaillant 7 heures par jour, un fossé long de 40 mètres, large de 4 mètres et profond de 3 mètres?

Solution. Les termes exprimés par les trois dimensions des fossés peuvent être réduits chacun à un seul nombre en multipliant la longueur par la largeur et par la profondeur, ce qui donne pour le premier fossé 180 mètres, et pour le second 480 mètres.

10 ouvriers en 3 jours en travaillant 6 heures = 180 ouvriers en 1 heure; x ouvriers en 6 jours 7 heures par jour = $x \times 42$ ouvriers en 1 heure.

$$180 : x \times 42 :: 180 : 480$$
$$\text{ou } 180 : x \times 42 :: 18 : 48$$
$$\text{ou } 30 : x \times 42 :: 3 : 48$$
$$\text{ou } 30 : x \times 42 :: 1 : 16.$$

$x = 11$ ouvriers $\frac{3}{7}$.

On s'étonnera sans doute qu'on emploie une fraction d'ouvriers ; mais elle doit plutôt s'entendre du temps employé par un ouvrier.

Règle de société.

(186) — Deux personnes ont fait une entreprise dans laquelle le bénéfice est monté à 80000 fr. Le premier a mis 10000 fr. dans cette entreprise, et le second 20000 fr. ; que revient-il à chacun selon sa mise de fonds?

Solution. Il est certain que le bénéfice doit être en proportion de la mise de fonds. Dans la question ci-dessus, par exemple, celui qui a mis le double de fonds doit avoir un bénéfice double. Dans toute société le bénéfice individuel est au bénéfice total comme la mise de fonds individuelle est à la mise de fonds totale. Il faut donc faire autant de proportions qu'il y a d'associés, d'où l'on a les proportions :

$$30000 : 10000 :: 80000 : x$$
$$30000 : 20000 :: 80000 : x$$
$$\text{ou } 3 : 1 :: 80000 : x = 26666{,}67$$
$$3 : 2 :: 80000 : x = 53333{,}33$$

— 4 personnes que nous désignerons par les lettres A B C D ont mis en société une somme de 100000 fr., sur laquelle A a fourni 20000 fr., B 12000 fr., C 30000 fr., et D 38000 fr. Ils ont perdu 50000 fr.; quelle perte éprouve chaque associé suivant sa mise de fonds?

Solution. A $100000 : 20000 :: 50000 : x = 10000$ fr.
B $100000 : 12000 :: 50000 : x = 6000$
C $100000 : 30000 :: 50000 : x = 15000$
D $100000 : 38000 :: 50000 : x = 19000$

50000 fr.

On voit d'après cela que la règle de société sert à trouver le bénéfice qui revient à chaque associé, ou la perte qu'il doit essuyer suivant sa mise de fonds.

— Trois négocians A B C ont mis en société les sommes suivantes, savoir : A 6000 fr., B 7000 fr., et C 2000 fr. Le bénéfice total s'est élevé à 34000 fr.; que revient-il à chacun?

Solution. $6000 + 7000 + 2000 = 15000$. On aura pour proportion : la mise totale est à la mise particulière comme le bénéfice total est au bénéfice particulier.

A $15 : 6 :: 34000 : x = 13600$ fr.
B $15 : 7 :: 34000 : x = 15866,67$
C $15 : 2 :: 34000 : x = 4533,33$.

(187) — Deux personnes A et B ont mis en société, savoir : A 6000 fr. pendant 6 mois, et B 8000 fr. pendant 11 mois. Le bénéfice total est de 50000 fr.; que revient-il à chacun?

Solution. On voit que dans cette question le bénéfice particulier dépend de deux causes, savoir : de la mise de fonds de chacun et du temps que cette somme est restée dans la société. A a fourni un capital de 6000 fr. pendant 6 mois; mais pour que ce capital rapportât pendant 1 mois ce qu'il rapporte pendant 6 mois, il faudrait qu'il fût 6 fois aussi fort; donc 6000 fr. pendant 6 mois = 36000 fr. pendant 1 mois.

On trouvera de même pour B que 8000 fr. pendant 11 mois = 88000 fr. pendant 1 mois, ce qui donne les proportions suivantes:

$$\begin{array}{lr} \text{A } 124000 : 36000 :: 50000 : x = & \overset{\text{fr.}}{14516{,}12} \\ \text{B } 124000 : 88000 :: 50000 : x = & 35483{,}87 \\ \hline & 49999{,}99 \end{array}$$

Il manque un centime pour que la somme des bénéfices particuliers soit égale au bénéfice total. Cette erreur provient des restes que l'on a négligés dans les divisions; mais on peut la regarder comme nulle.

Lorsque dans une opération de société on exprime le temps pendant lequel les sommes sont restées dans l'association, l'opération s'appelle *règle de société par temps*. Elle consiste, comme on l'a vu, à multiplier les fonds de chacun par le temps.

— Deux associés A et B ont mis chacun les fonds suivants dans une entreprise, savoir : A 13000 fr. pendant 8 mois, et B 12000 fr. pendant 1 an. Le bénéfice est de 10000 fr.; que revient-il à chacun?

Solution. A 13000 fr. pendant 8 mois = 13000 $\times$ 8 = 104000 fr. pendant 1 mois. B 12000 fr. pendant 1 an ou 12 mois = 12000 $\times$ 12 = 144000 fr. pendant 1 mois. Il revient à A 4193 fr. 54 cent., et à B 5806 fr. 45 cent.

— Trois négocians A B C ont fait une entreprise dans laquelle il y a eu un bénéfice de 30000 fr. A a mis 6000 fr. pendant 2 ans, B 12000 fr. pendant 6 mois, et C 10000 fr. pendant 1 an et 4 mois; que revient-il à chacun?

Solution. A 6000 fr. pendant 2 ans $= 6000 \times 24$ $= 144000$ fr. pendant 1 mois. B 12000 fr. pendant 6 mois $= 12000 \times 6 = 72000$ fr. pendant 1 mois. C 10000 fr. pendant 16 mois $= 10000 \times 16 =$ 160000 fr. pendant 1 mois. On fait les proportions comme il a été indiqué.

(188) Cette règle sert aussi à partager un nombre en parties proportionnelles à des nombres donnés, comme dans cette question :

Partager 100 en deux parties qui soient entre elles comme 1 à 2, c'est-à-dire que la première doit être la moitié de la seconde?

On peut faire cete opération de deux manières : 1° d'après l'énoncé de la question, 100 doit avoir trois parties. On prendra donc le tiers de 100 et on le répétera deux fois, ce qui répondra à la question ; 2° par deux proportions ainsi qu'il suit :

Première partie. $3 : 100 :: 1 : x = 33\frac{1}{3}$
Seconde partie. $3 : 100 :: 2 : x = 66\frac{2}{3}$

100

— Partager 156 en trois parties qui soient entre elles comme les nombres 2, 4, 7?

Solution. 156 doit contenir 13 parties. En multipliant la treizième partie de 156 par 2, on aura la première partie; en multipliant la treizième partie par 4, on aura la seconde; enfin en multipliant cette treizième partie par 7, on aura la troisième; ou par les proportions :

$$13 : 156 :: 2 : x = 24$$
$$13 : 156 :: 4 : x = 48$$
$$13 : 156 :: 7 : x = 84$$
$$\overline{\quad 156}$$

— Un père laisse en mourant une somme de 20000 fr. à partager entre ses deux fils, de manière que le cadet ait les quatre cinquièmes de l'aîné.

Solution. En prenant la neuvième partie de la somme et en la répétant 4 fois on aura la part du cadet; en la répétant 5 fois on aura celle de l'aîné; ou par les proportions :

$$9 : 20000 :: 4 : x = 8888 \text{ fr. } 89 \text{ cent.}$$
$$9 : 20000 :: 5 : x = 11111 \quad 11$$

Règle d'intérêt.

(189) L'intérêt est un bénéfice que l'on retire d'une somme prêtée ou employée d'une manière quelconque; ce bénéfice se calcule à tant par 100 francs; en sorte que si l'on prête une somme de 1000 fr. pendant un an à 5 pour 100, la personne qui a emprunté rendra au bout d'un an 1000 fr., plus autant de fois 5 fr. qu'il y a de fois 100 fr. dans la somme empruntée : elle rendra donc 1050 fr. Au bout de deux ans

l'intérêt serait double, elle rendrait donc 1100 fr. La somme prêtée ou placée d'une manière quelconque s'appelle le *capital*, et le *tant pour cent* s'appelle le *taux* de l'intérêt.

L'intérêt en général que l'on retire d'une somme est 5 pour 100, c'est-à-dire qu'elle rapporte autant de fois 5 fr. qu'il y a de fois 100 fr. dans le capital; en sorte que 100 fr. est toujours le terme de comparaison. Cependant on calcule quelquefois l'intérêt à 2, 3, 4, 6, 8, 10, etc., pour 100.

Les revenus d'une personne se calculent sur le taux de 5 pour 100, c'est-à-dire que si la fortune d'une personne se monte à 100000 fr., soit en argent placé, soit en immeubles, elle doit en retirer par an 5 pour 100 d'intérêt ou 5000 fr, ce qui est son revenu. Si donc on dit qu'une personne a 10000 fr. de revenu ou de rente, cela veut dire que 10000 fr. est l'intérêt à 5 pour 100 d'un capital placé d'une manière quelconque.

On évalue encore l'intérêt *au denier tant*, comme au denier 10, 20, 25, etc., cela veut dire que 10, 20 ou 25 fr. rapportent 1 fr.; mais le denier 10 est la même chose que 10 pour 100, puisque si 10 fr. rapportent 1 fr., 100 fr. en rapporteront 10. Le denier 20, par la même raison, est la même chose que 5 pour 100. Le denier 25 est la même chose que 4 pour cent, et le denier 50 est égal à 2 pour cent. Le tant pour cent s'écrit ainsi par abréviation, *tant p.* $\frac{0}{0}$.

— On veut connaître l'intérêt de 35000 fr. pendant un an à 5 p. $\frac{0}{0}$.

Solution. Puisque 100 fr. rapportent 5 fr., autant 100 est contenu de fois dans le capital autant on a de fois 5 fr. Donc pour trouver l'intérêt d'une somme, il faut diviser cette somme par 100 et multiplier le résultat par 5. 35000 | 100 = 350, × 5 = 1751 fr.

— Quel est l'intérêt d'un capital de 66720 fr., placé à 6 p. $\frac{0}{0}$?

Solution. 66720 | 100 = 667 fr. 20 cent. × 5 = 3336 fr.

— Quel est l'intérêt de 84750 fr. au denier 25?

Solution. Puisque 25 fr. rapportent 1 fr., autant 25 sera contenu de fois dans le capital, autant on aura de fr. Pour trouver l'intérêt d'un capital par le *denier tant*, il suffit de diviser par ce dernier, le quotient est la somme cherchée. 84750 | 25 = 3390 fr.

On pourrait aussi mettre ces questions sous la forme de proportions, en disant : le capital 100 est au capital total comme l'intérêt 5 est à l'intérêt total. Pour la question précédente on aura :

$$100 : 84750 :: 4 : x.$$

En calculant par le denier tant on aura : le capital 25 est au capital total comme l'intérêt 1 est à l'intérêt total (car 25 est un capital dont l'intérêt est 1 franc).

$$25 : 84750 :: 1 : x.$$

Mais on voit qu'on peut facilement se passer de ces proportions en calculant directement l'intérêt comme nous l'avons expliqué.

(190) — On a prêté la somme de 22000 fr. à 6

p. $\frac{0}{0}$. On la retire au bout d'un an avec les intérêts ; quelle somme a-t-on retirée?

Solution. L'intérêt de 22000 fr. à 6 p. $\frac{0}{0}$ est 1320 fr. On a donc retiré 22000 + 1320 ou 23320 fr.

— On a placé dans une maison de commerce une somme de 12000 fr. à 6 p. $\frac{0}{0}$, au bout d'un an on y place de nouveau 8000 fr., et au bout de la seconde année encore 16000 fr., à la fin de la troisième année on retire les capitaux et les intérêts simples ; quelle somme a-t-on retirée?

Solution. Il faut chercher l'intérêt de 12000 fr. pour trois ans, celui de 8000 fr. pour deux ans, et celui de 16000 fr. pour un an ; ajouter ces intérêts et les capitaux, et l'on aura la somme cherchée.

L'intérêt de 12000 fr. pour 3 ans est de	2160 fr.
L'intérêt de 8000 fr. pour 2 ans est de	960
L'intérêt de 16000 fr. pour 1 an est de	960
	12000
	8000
	16000
	40080 fr.

(191) — Une personne emprunte 15000 fr. à 5 p. $\frac{0}{0}$ et rembourse cette somme au bout de 7 mois ; quel intérêt a-t-elle dû payer?

Solution. L'intérêt de 15000 fr. à 5 p. $\frac{0}{0}$ est pour un an de 750 fr., pour un mois ce sera la douzième partie de 750 fr. ou 62 fr. 50 cent., et pour 7 mois ce sera 7 fois la douzième partie ou 458 fr. 50 cent.

— Quel est pour 9 mois l'intérêt de 20000 fr. placés à 8 p. $\frac{0}{0}$?

Solution. L'intérêt d'un an est 1600 fr., pour un mois ce sera la douzième partie de 1600 fr., et pour 9 mois 9 fois la douzième partie; mais on peut remarquer que 9 mois sont les trois quarts de 12 mois, qu'ainsi il suffira de prendre les trois quarts de 1600 qui sont 1200 fr.

(192) — Une personne ayant emprunté une certaine somme à 5 p. $\frac{0}{0}$, rembourse au bout d'un an 13650 fr., intérêt et capital; on demande quelle est la somme empruntée?

Solution. 13650 fr. renferment le capital et l'intérêt. Nous aurons la proportion : 105 capital et intérêt est à 13650 capital et intérêt, comme 100 capital seul est à x capital seul;

$$\text{Ou } 105 : 13650 :: 100 : x = 13000.$$

(193) — L'intérêt d'une somme de 25600 fr. se monte au bout d'un an à 1024 fr.; on demande quel est le taux de l'intérêt?

Solution. Le capital 100 est au capital 25600, comme l'intérêt de 100 x est à l'intérêt total 1024.

$$100 : 25600 :: x : 1024 = 4 \text{ p. } \tfrac{0}{0}.$$

— A quel taux faut-il prêter 50000 fr. pour en retirer 3000 fr. par an?

Solution. $100 : 50000 :: x : 3000$

$$\text{ou} \quad 1 : 500 :: x : 3000 = 6 \text{ p. } \tfrac{0}{0}.$$

— A quel taux faut-il prêter 36000 fr. pour retirer 2400 fr. d'intérêt au bout de 8 mois?

Solution. Si 2400 fr. est l'intérêt de 8 mois, celui d'un mois sera la huitième partie ou 300 fr. et celui de 12 mois ou un an sera 12 fois autant ou 3600 fr., d'où l'on a la proportion :

$$100 : 36000 :: x : 3600 = 10 \text{ p. } \%.$$

— Quel est l'intérêt de 24000 fr. pour 25 jours à 4 p. %?

Solution. On cherche d'abord l'intérêt d'un an qui est 960 fr., puis on fera la proportion :

365 jours est à 25 jours comme 960 intérêt d'un an est à x intérêt de 25 jours.

$$365 : 25 :: 960 : x = 65 \text{ fr. } 75 \text{ cent.}$$

Intérêt composé.

(194) Lorsqu'en plaçant des fonds on ne retire pas les intérêts et qu'au contraire on les laisse accumuler pour les joindre au capital, ces intérêts augmentent d'autant le capital et portent intérêt à leur tour; c'est ce qu'on appelle retirer *l'intérêt des intérêts.*

— Une personne a placé pendant 4 ans une somme de 25000 f. à 5 p. %, et a joint au capital l'intérêt de chaque année, qui à son tour a porté intérêt, au bout de 4 ans elle retire ses fonds; à combien se montent-ils?

Solution. A la fin de la première année la somme se montera à 25000 fr., plus les intérêts d'un an, ce qui fait en tout 26250 fr.

A la fin de la seconde année le capital étant de

26250 fr. se trouvera augmenté de l'intérêt de ce même capital ; l'intérêt de 26250 fr. est 1312 fr. 50 cent., ensemble cela fait 27562 fr. 50 cent.

A la fin de la troisième année le capital 27562 fr. 50 cent. se trouvera augmenté de l'intérêt de ce même capital, ce qui se monte à 28940 fr. 62 cent.

Enfin, à la fin de la quatrième année on retirera encore l'intérêt de ce dernier capital, ce qui produit en tout 30387 fr. 65 cent.

(195) — On désire savoir à combien se montent les intérêts des intérêts d'une somme de 20000 fr., placés pendant trois ans à 4 p. $\frac{0}{0}$?

Solution. La première année on aura l'intérêt simple de 20000 fr. qui est 800 fr.

La seconde année on aura l'intérêt de 20800 fr. qui est 832 fr.

La troisième année on aura l'intérêt de 21632 fr. qui est 865 fr. 28 cent.

La somme des intérêts des intérêts pendant ces trois ans $= 800 + 832 + 865$ fr. 28 cent. $= 2497$ fr. 28 cent.

(196) — Une somme prêtée pendant cinq ans à 5 p. $\frac{0}{0}$ a rapporté 4800 fr. d'intérêt composé ; quel est le capital?

Solution. L'intérêt composé de 100 fr. pour 5 ans est de 26 fr. 3 cent. On aura donc la proportion :

Le capital 100 est au capital cherché x, comme 26,03 intérêt composé de 100 est à 4800 intérêt composé du capital x.

Ou $100 : x :: 26{,}03 : 4800 = 18440$ fr. 26 cent.

— A combien se montent les intérêts des intérêts d'une somme de 15000 fr. prêtée pendant 3 ans 4 mois à 4 p. $\frac{0}{0}$?

Solut. 1re année, intérêt de 15000 fr.	=	600 fr.	
2e année, intérêt de 15600 fr.	=	624	
3e année, intérêt de 15624 fr.	=	624	96 c.
L'intérêt de 4 mois.	=	208	32 c.
Total. . .		2057 fr.	28 c.

Règle d'escompte.

(197) Si l'on emprunte une somme de 15000 fr., par exemple, payable dans un an, à 5 p. $\frac{0}{0}$ d'intérêt, au bout de l'année on remboursera le capital 15000 fr., plus l'intérêt de ce capital, ce qui fait une somme de 15750 fr.; c'est ce que l'on appelle intérêt *en dedans*.

D'autres fois la personne qui prête se retient de suite l'intérêt, ainsi on remboursera dans un an 15000 fr.; mais on n'en aura reçu que 15000 — 750 ou 14250 fr.; c'est ce que l'on appelle intérêt *en dehors*.

Il arrive souvent que la personne qui emprunte se réserve le droit de rembourser avant le terme; le prêteur doit alors lui faire une déduction sur les intérêts; cette déduction s'appelle *escompte*. L'escompte est dit *en dedans* ou *en dehors*, suivant que l'intérêt a été calculé en dedans ou en dehors.

Si un particulier ayant une lettre de change payable dans six mois veut en recevoir le montant de suite, on lui fera une retenue sur cette lettre, c'est-à-dire que la personne qui doit la lui payer se retiendra tant pour cent, ou escomptera tant pour cent, suivant le temps qui doit s'écouler jusqu'à *l'échéance*. On appelle *échéance* d'un billet, l'époque à laquelle il doit être remboursé.

— Un particulier a une lettre de change de 5000 fr. payable dans un an; il en désire le remboursement de suite moyennant escompte de 7 p. $\frac{0}{0}$; combien recevra-t-il?

Solution. Si l'escompte est de 7 fr. pour 100 fr., combien sera-t-il pour 5000 fr.? On aura la proportion: l'escompte 7 est à l'escompte x, comme le capital 100 est au capital 5000.

$$7 : x :: 100 : 5000 = 350 \text{ fr.}$$

Le débiteur se retiendra donc 350 fr. et paiera par conséquent 4650 fr.

On peut encore résoudre cette question de la manière suivante: si 100 fr. se réduisent à 93 fr., à combien se réduiront 5000 fr.?

$$93 : x :: 100 : 5000 = 4650.$$

— Un négociant a livré à une autre personne pour 3560 fr. de drap payable dans 6 mois, à 5 p. $\frac{0}{0}$ d'intérêt. Le marchand désirant le remboursement de suite, on demande quelle sera la déduction faite sur le billet de l'acquéreur?

Solution. L'intérêt de 3560 fr. pour un an est de 178 fr.; pour 6 mois, ce sera la moitié de 178 fr., c'est-à-dire 89 fr. L'acquéreur souscrira donc un billet de 3560 + 89 ou de 3649 fr. (intérêt en dedans); mais si le négociant désire le remboursement de suite, il sera obligé de déduire 89 fr. du billet, c'est-à-dire que le débiteur ne sera tenu de payer que 3560 fr.

— Une personne ayant emprunté pour 6 mois une somme de 5000 fr. à 6 p. $\frac{0}{0}$, s'est réservé le droit d'avancer le paiement. En conséquence désirant rembourser au bout de 4 mois, on demande quelle sera la déduction faite sur les intérêts? (Intérêt en dedans.)

Solution. Le capital étant de 5000 fr., le billet se montera à 5000 fr., plus les intérêts de ce capital pour 6 mois, c'est-à-dire que le débiteur devrait payer au bout de 6 mois 5150 fr.; mais remboursant au bout de 4 mois, le paiement se trouve avancé de 2 mois; il faudra donc diminuer sur le billet l'intérêt de 2 mois. Or si l'intérêt de 6 mois est 150 fr., celui de 2 mois sera le tiers, par conséquent 50 fr. Le débiteur remboursera donc seulement 3100 fr.

— Une personne a souscrit un billet de 8480 fr. payable dans 18 mois, à 4 p. $\frac{0}{0}$ (intérêt en dedans); cette personne se présentant pour payer au bout de 8 mois; on demande quel sera l'escompte qu'on lui fera sur son billet?

Solution. Le billet de 8480 fr. renferme le capital et l'intérêt. Le paiement étant avancé de 10 mois, il faut en escompter l'intérêt de ce temps. A cet effet on cherchera l'intérêt d'un an, puis celui d'un mois, qu'on répétera 10 fois, et l'on retranchera cette somme du billet.

Pour trouver l'intérêt d'un an on dira : Si l'intérêt de 100 fr. est de 4 fr. pour un an, il sera de 6 fr. pour 18 mois, on aura donc :

106 fr. capital et intérêt de 18 mois est à 8480 capital intérêt de 18 mois, comme 4 intérêt d'un an de 100 fr. est à x intérêt d'un an de 8480 fr.

$$106 : 8480 :: 4 : x = 320$$

Si l'intérêt d'un an est 320 fr., celui d'un mois en sera la douzième partie ou 26 fr. 66 cent., et celui de 10 mois sera 10 fois autant ou 266 fr. 66 cent.

Le billet sera donc réduit à 8480 — 266,66, c'est-à-dire à 8213 fr. 34 cent.

— Un particulier ayant emprunté une certaine somme, souscrit un billet de 4000 fr. payable dans un an, à 6 p. % (intérêt en dehors). Le remboursement se trouvant effectué au bout de 4 mois, on demande à combien se monte l'escompte?

Solution. Puisque l'intérêt est en dehors, le billet renferme le capital emprunté, mais l'emprunteur n'a pas reçu 4000 fr. ; on a commencé à se retenir l'intérêt de cette somme. L'intérêt de 4000 fr. à 6 p. % est 240 fr. ; donc l'emprunteur n'a reçu que 3760 fr. et doit en rembourser 4000. Mais le paiement étant avancé de 8 mois, il faut en escompter l'intérêt de ce temps. L'intérêt de 8 mois est 160 fr., somme qui doit être escomptée sur le billet de 4000 fr., on remboursera donc seulement 4840 fr.

— Une personne ayant un billet de 728 fr. à recevoir dans un an, désire le remboursement de suite, moyennant escompte à 5 p. $\frac{0}{0}$; combien recevra-t-elle? (Escompte en dedans.)

Solution. La question se réduit à trouver l'intérêt compris dans les 728 fr. à 5 p. $\frac{0}{0}$, et à le retrancher de cette somme.

$$105 : 728 :: 5 : x = 34 \text{ fr. } 67 \text{ cent. int.}$$
$$\text{ou } 105 : 728 :: 100 : x = 693 \text{ fr. } 33 \text{ cent. cap.}$$

— Une personne ayant à recevoir dans un an un billet de 900 fr., en désire le remboursement de suite, moyennant escompte de 6 p. $\frac{0}{0}$; combien recevra-t-elle? (Escompte en dehors.)

Puisque l'intérêt est à 6 p. $\frac{0}{0}$, 100 fr. se réduisent à 94 fr.; d'où l'on a la proportion :

$$100 : 900 :: 94 : x = 846.$$

Donc la personne qui a fait le billet n'a reçu que 846 fr., mais son billet est de 900 fr.; en le remboursant de suite, elle ne doit payer que 846 fr.

Règle de change.

(198) Supposons qu'un négociant de Paris veut faire passer à son correspondant de Lyon une somme de 5000 fr. Pour éviter les frais de transport et les risques que l'argent peut courir en route, il s'adresse à un banquier auquel il remet ladite somme. Le banquier lui remet en échange un billet que le négociant de Paris envoie à son correspondant de Lyon, et au moyen duquel il se fait rembourser cette somme

chez un banquier de cette dernière ville. Mais le banquier qui reçoit l'argent se fait payer un intérêt qui se calcule à tant pour 100, comme l'intérêt ordinaire. Cet intérêt se paie en sus de la somme qu'on lui remet ou il se le retient sur cette même somme. Cet intérêt se nomme *le change*, et se calcule comme l'intérêt ordinaire.

— Un négociant de Paris voulant faire passer à un autre négociant de Marseille une somme de 10000 fr., s'adresse à un banquier qui lui demande 2 pour 100 de change; combien faut-il remettre à ce banquier pour que le négociant de Marseille reçoive 10000 fr.?

Solution. $100 : 102 :: 10000 : x = 10100$. C'est comme si l'on demandait quel est le capital et l'intérêt de 10000 fr. à 2 p. $\frac{0}{0}$ d'intérêt? Le montant de la lettre de change est donc un véritable capital et le taux du change en est l'intérêt. La seule différence qu'il y ait entre cette règle et celle d'intérêt proprement dit, c'est que dans cette dernière le taux de l'intérêt ou le tant pour 100 est toujours calculé pour un an, tandis que dans les lettres de change le temps n'est pas déterminé.

— Quel est le change de 12000 fr. à 3 p. $\frac{0}{0}$?

Solution. $100 : 12000 :: 3 : x = 360$ fr.

On devra donc remettre au banquier 12360 fr. pour recevoir dans l'autre ville 12000 fr.

— On remet à un banquier de Paris 20000 fr.; combien devra-t-on recevoir à Bordeaux si le change est à 3 p. $\frac{0}{0}$?

Solution. Le change ayant été pris sur les 20000 fr., on devra recevoir à Bordeaux une somme moindre que 20000 fr., à cet effet on aura la proportion :

$$103 : 100 :: 20000 : x = 19417 \text{ fr. } 47 \text{ cent.}$$

— On a remis à un banquier une somme de 15300 fr. pour une lettre de change de 15000 fr.; on demande quel est le taux du change?

Solution. Puisqu'on a remis 15300 fr. pour une lettre de change de 15000 fr., le total du change est donc de 300 fr., on aura donc la proportion :

$$300 : 15000 :: x : 100 = 2 \text{ p. } \%.$$

Règle d'alliage.

(199) Lorsqu'on mélange différentes choses de différentes valeurs, il en résulte une chose d'une valeur moyenne. Par exemple, si l'on mêle un litre de vin à 75 cent. et un litre d'un autre vin à 55 cent., on obtient un mélange de 2 litres qui vaut 75 c. + 55 c. = 130 c.; mais un seul litre coûtera la moitié de 130 ou 65 cent., prix moyen entre le prix de la première qualité de vin et celui de la seconde que l'on a mélangées.

Tel est le but de la règle d'alliage, qui, comme on le voit, sert à trouver la valeur moyenne de plusieurs choses de différentes valeurs mêlées ensemble.

Ces sortes de questions peuvent se présenter sous deux points de vue, soit qu'on recherche la valeur moyenne des divers objets, soit qu'on recherche la proportion suivant laquelle ils ont été mélangés, connaissant la valeur moyenne et la valeur de chacun en particulier. C'est ce qui constitue les deux espèces de questions renfermées dans cette règle.

(200) — On a mêlé un litre de vin à 1 fr. 25 c., un litre d'une autre qualité à 1 fr. 50 c., et un litre d'une autre qualité à 75 c.; quelle est la valeur du litre du mélange?

Solution. Il est certain qu'en mélangeant ces trois sortes de vins, on doit recevoir trois litres valant ensemble 1 fr. 25 c. + 1 fr. 50 c. + 75 c. ou 3 fr. 50 c.; mais un seul litre coûtera la troisième partie du prix du mélange ou 1 fr. 16 c.

— Un marchand de vin fait un mélange de 6 litres de vin à 1 fr. 50 c. le litre et de deux litres d'eau; combien doit-il vendre le litre de ce mélange pour gagner 50 c. par litre?

Solution. 6 litres à 1 fr. 50 c. = 9 fr.; mais comme il y joint 2 litres d'eau, il résulte qu'il a 8 litres pour 9 fr. Un litre coûtera donc la huitième partie de 9 fr. ou 1 fr. 12 c. Mais en vendant le litre 1 fr. 12 c., il n'y gagnera rien; il faut donc qu'il le vende 50 c. de plus ou 1 fr. 62 c.

— Un marchand achète du vin à 1 fr. 50 cent. le litre; combien gagnera-t-il en le vendant au même prix si sur 10 litres il met 3 litres d'eau?

Solution. 10 litres à 1 fr. 50 c. = 15 fr. Puisqu'on y ajoute 3 litres d'eau, on aura donc 13 litres pour 15 fr. Si 13 litres coûtent 15 fr., 1 litre en coûtera la treizième partie ou 1 f. 15 c. Puisqu'il le vend 1 fr. 50 c., il gagne donc 35 c. par litre.

— On a mêlé 30 kilolitres de blé à 80 fr. le kilolitre et 10 kilolitres d'une espèce inférieure à 50 fr. ; quel est le prix du kilolitre du mélange ?

Solution. 30 kilol. à 80 fr. font 2400 fr., 10 kilol. à 50 fr. font 500 fr. Les 40 kilol. ensemble coûteront donc 2900 fr., et 1 kilol. en coûtera la quarantième partie ou 72 fr. 50 c.

D'après les questions précédentes, on peut voir que le principe général pour résoudre ces sortes de questions est de chercher la valeur totale du mélange, et de diviser ce produit par la quantité totale des unités mélangées. Ainsi dans la question précédente, la valeur totale des grains est de 2900 fr. On divise ce produit par 40, qui indique la quantité totale de kilolitres.

On voit encore que ces questions peuvent se résoudre sans le secours des proportions ; mais si l'on voulait s'en servir, on aurait pour la question précédente : 40, somme totale des kilol., est à 2900, prix total du mélange, comme 1 kilol. est à x, prix du kilol.

$$40 : 2900 :: 1 : x.$$

Mais 2900 multiplié par 1 ne change pas le nombre, de sorte qu'il revient au même de diviser de suite le prix total par la quantité totale des marchandises.

— On emploie à un ouvrage 10 ouvriers payés à raison de 30 sous par jour ; 20 autres ouvriers à 24 sous, et 15 ouvriers à 1 fr. 75 c. ; combien a-t-on payé chaque ouvrier l'un portant l'autre ?

Solution. Les 10 premiers ouvriers à raison de 30 sous ou de 1 fr. 50 c. coûteront 15 fr. ; les 20 seconds à raison de 24 sous ou de 1 fr. 20 c. coûteront 24 fr., et les 15 derniers à raison de 1 fr. 75 c. coûteront 26 fr. 25 c. Ensemble 65 fr. 25 c. Il y a en tout 45 ouvriers. Divisant le prix total par le nombre d'ouvriers, on trouve pour chacun l'un dans l'autre 1 fr. 45 c. ou 29 sous.

— Pour faire des confitures on a employé 20 livres de groseilles à 20 c. la livre, 10 livres de framboises à 25 c. la livre, et 24 livres de sucre à 2 fr. 20 c. Le produit a donné 25 livres de confitures; à combien revient la livre?

Solution. 20 liv. à 20 c. = 4 fr.; 10 liv. à 25 c. = 2 fr. 50; 24 liv. à 2 fr. 20 c. = 52 fr. 80 c. Prix total: 59 fr. 30 c. La livre de confitures en coûtera la vingt-cinquième partie ou 2 fr. 37 c.

— Pour faire une liqueur on a employé 40 livres de cerises à 10 c., 10 livres de groseilles à 20 c., 6 livres de sucre à 1 fr. 75 c., une demi-bouteille d'esprit de vin à 1 fr. 50 c., épices pour 6 fr. Le tout a produit 23 bouteilles et demie de liqueur; à combien revient la bouteille?

Solution.	40 livres à 10 c. . . . . . =	4 fr.
	10 livres à 20 c. . . . . . =	2 fr.
	6 livres sucre à 1 fr. 75 c. =	10 fr. 50 c.
	Esprit de vin.	1 fr. 50 c.
	Epices.	6 fr.
	Total.	24 fr.

Pour trouver le prix de la bouteille il faut diviser 24 fr. par 23 $\frac{1}{2}$. A cet effet on réduit les bouteilles en demies, ce qui en donne 47. Mais il faut aussi multiplier 24 par 2 afin d'établir l'équilibre entre le dividende et le diviseur. On aura donc 48 à diviser par 47, ce qui donne pour résultat et pour prix de la bouteille 1 fr. 2 c.

(201) On veut mêler du vin à 15 sous le litre et du vin à 24 sous le litre pour en faire un mélange qui revienne à 18 sous le litre; dans quelle proportion faut-il les mélanger?

Le vin à 15 sous étant vendu 18, on gagne 3 sous; mais le vin à 24 sous étant vendu 18 sous, on en perd 6. Il faut donc établir une compensation entre ces deux qualités, afin qu'en mettant plus ou moins de l'une ou de l'autre il n'y ait ni perte ni gain. Puisque la perte que l'on fait sur la première qualité est plus grande que le gain que l'on fait sur la seconde qualité, il est évident qu'il en faut plus de cette dernière, afin de compenser la perte faite sur la première.

Mais si le prix moyen était également éloigné du prix supérieur et du prix inférieur, comme dans cette question : *On fait un mélange de vin à 10 sous et de vin à 20 sous pour avoir un vin mixte qui coûte 15 sous; dans quelle proportion*, etc.? il s'ensuivrait qu'ils doivent être mélangés par quantités égales; car sur la première qualité on perd 5 sous, et sur la seconde on en gagne 5; il n'y a donc ni perte ni gain. On s'assure de cela en supposant cette question : *On mélange 1 litre de vin à 10 sous et 1 litre à 20 sous; combien coûte le litre du mélange?* Les deux litres coûteront 30 sous, et chaque litre en coûtera 15.

D'après ce qui vient d'être dit, on voit 1° que dans un mélange de deux choses de diverses qualités pour en avoir une d'une qualité moyenne, il y a toujours perte sur la première qualité et gain sur la seconde; 2° si le prix moyen est également distant des deux autres, la perte compense le gain, et par conséquent les choses doivent être mélangées en quantités égales; 3° si le prix moyen est plus près du prix inférieur, comme dans la première question, la perte est plus forte que le gain, et conséquemment il faut plus de la seconde partie que de la première; 4° si le prix moyen est plus près du prix supérieur, c'est que le gain est plus fort que la perte, en sorte qu'il faut plus de la première qualité que de la seconde. D'après cela, soit cette question : *Mélanger du vin à* 10 *sous et du vin à* 20 *sous pour avoir un vin mixte à* 18 *sous; dans quelle proportion faut-il les mélanger?*

Solution. La différence du prix du mélange au prix de la seconde qualité indique la quantité de vin de la première qualité, et la différence du prix du mélange au prix de la première qualité indique la quantité de vin de la seconde qualité. Ainsi le prix moyen étant 18, et la différence de 18 à 20 étant 2, on en conclut qu'il faut 2 litres de la seconde qualité; la différence de 18 à 10 étant 8, il en faut 8 de la première.

Donc 8 litres à 20 sous et 2 litres à 10 sous donnent un mélange qui revient à 18 sous.

On peut s'assurer de l'exactitude de cette règle, en changeant la question en celle-ci :

— On mêle 8 litres de vin à 20 sous et 2 litres à 10 sous; quel est le prix du litre du mélange?

Réponse. 8 litres à 20 sous font 160 sous, 2 litres à 10 font 20 sous; le mélange coûte donc 180 sous; mais ce mélange contenant 10 litres, chaque litre coûtera la dixième partie ou 18 sous.

— On mélange deux espèces d'eau-de-vie, l'une à 2 fr. le litre et l'autre à 3 fr.; dans quelle proportion faut-il les mélanger pour que le prix moyen soit de 2 fr. 50 cent.?

Solution. Puisque le prix moyen est également éloigné du prix supérieur et du prix inférieur, il en faudra autant de l'une que de l'autre.

— Même question que la précédente, le prix moyen étant de 2 fr. 75 cent.?

Solution. La différence du prix moyen au prix supérieur étant de 25 cent. et la différence du prix moyen au prix inférieur étant de 75 cent., on en conclut que 25 litres de la seconde qualité et 75 litres de la première donnent un mélange qui revient à 2 fr. 75 cent.

Si l'on calculait en sous on aurait pour prix inférieur 40 sous, pour prix supérieur 60 sous, et pour prix moyen 55 sous. D'après cela il faudra donc 15 litres de la première qualité sur 5 de la seconde, ce qui équivaut à 75 d'une part et 25 de l'autre.

— On veut mélanger du blé à 6 fr., à 8 fr. et à 10 fr. le boisseau; combien en faut-il de chaque qualité pour faire un mélange qui revienne à 9 fr.?

Solution. $$9 \left\{ \begin{array}{l} 10 \ldots 3 + 1 \\ 8 \ldots 1 \\ 6 \ldots 1 \end{array} \right.$$

La différence du prix moyen 9 au prix *supérieur* 10 donne la quantité de blé de la qualité inférieure. On pose donc 1 en face de 6, prix de la moindre qualité. La différence du prix moyen 9 au prix *inférieur* 6 donne la quantité de blé de la première qualité. On pose donc 3 en face de 10, prix de la première qualité. Quant à la qualité intermédiaire, on prendra également la différence du prix moyen au prix supérieur, que l'on place en face de 8, puis on prend la différence du prix moyen au prix intermédiaire 8, ce qui donne 1 que l'on ajoute à la qualité supérieure. Donc en mêlant ensemble 4 boisseaux de la première qualité, 1 de la seconde et 1 de la troisième, on aura du blé à 9 fr.

Règle de fausse position.

(202) — 120 fr. à partager entre deux personnes, de manière que la première ait la moitié de la part de la seconde ; quelle est la part de chacune?

Solution. Puisque l'une des deux personnes a une partie comme l'autre en a deux, elles en ont ensemble trois. En prenant le tiers de 120, on aura la part de la première, et en la doublant on aura celle de la seconde. On trouve 40 et 80 ; en effet, les deux parts font ensemble 120.

— 600 fr. à partager entre trois personnes A B C d'après les conditions suivantes : B aura le double de

A et C aura le triple de A; quelle est la part de chacune?

Solution. Il faut chercher combien les trois parts contiennent de parties semblables à celle de A. Or A en a une, B en a deux et C en a trois, cela fait ensemble six. En prenant la sixième partie de 600 qui est 100, on aura la part de A; en la doublant on aura 200 pour celle de B, et en la triplant on aura 300 pour celle de C.

— 500 fr. à partager entre trois personnes A B C, de manière que B ait le double de A et C le double de B; quelle est la part de chacune?

Solution. A a une partie, B en a deux, C en a deux comme B ou quatre comme A, cela fait ensemble sept parties.

En prenant la septième partie de 500 on aura 71 fr. 43 cent. pour la part de A, en la doublant on aura 142 fr. 86 cent. pour la part de B, et en la quadruplant on aura 285 fr. 72 cent. pour la part de C.

En général, pour ces sortes de questions, il faut voir combien toutes les parties réunies contiennent de fois la plus petite. Lorsqu'on connaît cette dernière, les autres sont faciles à déterminer.

D'après ce qui vient d'être dit, on voit que la règle de fausse position a pour but de partager un nombre suivant des conditions données. Jusqu'à présent les parties ont été faciles à déterminer; mais il est des cas où il faut supposer un autre nombre, qui n'existe pas dans la question; c'est de cette fausse supposition que cette règle tire son nom, comme on le verra un peu plus tard.

— Partager 200 en deux parties, de manière que la première soit les $\frac{2}{3}$ de la seconde?

Solution. Si la première part a deux parties comme la seconde en a trois, elles en ont ensemble cinq; la cinquième partie de 200 est 40 ou 2 fois $40 = 80$ pour la première et 3 fois $40 = 120$ pour la seconde, $80 + 120 = 200$.

— Partager 1200 en trois parties, de manière que la première soit la moitié de la seconde, et la seconde les $\frac{2}{3}$ de la troisième?

Solution. La première part est la plus petite; les trois parts contiennent ensemble 6 parties semblables à la plus petite. $1200 \mid 6 = 200$ pour la première; $200 \times 2 = 400$ pour la seconde; $200 \times 3 = 600$ pour la troisième.

(203) — Partager 650 fr. entre trois personnes, de manière que la seconde ait le double de la première, et la troisième deux fois et $\frac{1}{2}$ autant que la seconde?

Solution. Supposons que la première part soit 4, la seconde sera 8 et la troisième 20. Quoique ces nombres ne soient pas exacts, ils nous serviront néanmoins à trouver les véritables nombres, parce que ceux-ci doivent être dans le rapport de 4, 8 et 20. La somme des trois parts supposées est 32; on aura donc trois proportions :

$$32 : 650 :: 4 : x = 81 \tfrac{1}{4}$$
$$32 : 650 :: 8 : x = 162 \tfrac{1}{2}$$
$$32 : 650 :: 20 : x = 406 \tfrac{1}{4}.$$

La somme des parties supposées est à la somme totale des parties réelles, comme chaque partie supposée est à chaque partie réelle. On voit donc que cette question se réduit à une simple règle de société, puisqu'il s'agit de partager un nombre en parties proportionnelles à des nombres donnés.

— Deux associés ont gagné dans une entreprise 20000 fr. ; quelle est la part de chacun, sachant que le second a mis 3 fois et $\frac{1}{2}$ autant que le premier?

Solution. Supposons que le premier ait mis 2 fr. (je choisis un nombre dont on puisse prendre la moitié), le second aura mis 7 fr., d'où l'on a les proportions :

$9 : 20000 :: 2 : x =$	4444 fr. 44 cent.
$9 : 20000 :: 7 : x =$	15555 fr. 56 cent.
	20000 fr. 00 cent.

— Trois associés ont fait dans une entreprise une perte de 6000 fr. ; quelle perte chacun doit-il supporter, suivant sa mise de fonds. Le second a mis 2 fois et $\frac{1}{2}$ autant que le premier, et le troisième 3 fois autant que le second?

Solution. Supposons que le premier ait mis 2 fr., le second en aura mis 5 et le troisième 15, ensemble 22 fr.

$$22 : 6000 :: 2 : x = 545 \text{ fr. } 45 \text{ c. } \tfrac{5}{11}$$
$$22 : 6000 :: 5 : x = 1363 \quad 63 \quad \tfrac{7}{11}$$
$$22 : 6000 :: 15 : x = 4090 \quad 90 \quad \tfrac{10}{11}$$

6000 fr. 00 c.

(204) — Trouver un nombre dont la moitié plus le quart fassent 36?

Solution. Je suppose que ce nombre soit 8 (je choisis 8, parce qu'on peut en prendre la moitié et le quart). Si le nombre cherché était 8, la moitié plus le quart seraient 6; 6 renferme donc la moitié et le quart de 8, comme 36 renferme la moitié et le quart du nombre inconnu. D'où l'on a la proportion :

$$6 : 8 :: 36 : x = 48.$$

— Trouver un nombre dont la moitié, le tiers et les trois quarts fassent 60?

Solution. Je suppose que ce nombre soit 12 (nombre dont on peut prendre la moitié, le tiers et les trois quarts). Si ce nombre est 12, la moitié est 6, le tiers est 4, et les trois quarts sont 9. $6 + 4 + 9 = 19$.

$$19 : 12 :: 60 : x = 37\tfrac{17}{19}.$$

— Quel est le nombre dont le tiers, le quart et les trois cinquièmes font 54? *R.* $37\frac{29}{43}$.

— Quel est le nombre dont les deux tiers, les trois quarts et les quatre neuvièmes font 100?

Solution. Il faut que le nombre supposé soit à la fois divisible par les dénominateurs 3, 4 et 9. Pour cela on les multipliera les uns par les autres, ce qui donne 108, nombre multiple de 3, 4 et 9. Si le nombre cherché était 108, les deux tiers, les trois quarts et les quatre neuvièmes seraient 201. D'où la proportion :

$$201 : 108 :: 100 : x = 53 \tfrac{147}{201}.$$

(205) — Partager 100 en deux parties de manière que la seconde soit de 18 plus grande que la première.

Solution. En retranchant 18 de 100 il reste 82, dont la moitié est 41. En ajoutant 18 à l'une des deux parties, on aura 41 et 59, qui remplissent les conditions de la question, puisqu'ensemble elles font 100.

— Partager 148 en trois parties de manière que la troisième ait 28 de plus que la seconde?

Solution. 148 moins 28 = 120. Le tiers de 120 est 40. Les trois parties sont donc 40, 40 et 68.

— Partager 300 en trois parties de manière que la seconde ait 12 de plus que la première, et la troisième 18 de plus que la seconde?

Solution. La seconde partie se compose de la première plus 12. La troisième se compose de la première plus 12 plus 18. Si donc on avait la première partie, il serait facile de trouver les autres. Or on trouvera la première en retranchant 12 + 12 + 18 ou 42 de 300, ce qui donne 258. Le tiers de 258 est 86 Puisque la première partie est 86, la seconde sera 86 + 12 ou 98. La troisième sera 86 + 12 + 18 ou 98 + 18 ou 116. 86 + 98 + 116 = 300.

— Partager 600 fr. entre trois personnes de manière que la seconde ait trois fois autant que la première et 24 fr. de plus, et que la troisième ait le double de la seconde et 18 fr. de plus ; quelle est la part de chacune?

Solution. La seconde partie est composée de trois fois la première plus 24. La troisième est composée de deux fois la seconde plus 18, ou de six fois la première plus deux fois 24 plus 18. On retranchera donc de 600 24 pour la seconde partie, et deux fois 24 plus 18 ou 66 pour la troisième; en tout 90. Il faut partager les 510 fr. qui restent en parties proportionnelles à 1, 3 et 6. Les trois parts contiennent ensemble 10 parties. La dixième partie de 510 donne 51 pour la première part; $3 \times 51 + 24 = 177$ pour la seconde; $2 \times 177 + 18 = 372$ pour la troisième. En effet, $51 + 177 + 372 = 600$.

— Partager 450 en trois parties de manière que la seconde soit le double de la première et 15 de plus, et que la troisième soit le triple de la seconde et 24 de moins?

Solution. Il faut retrancher de 450 15 pour la seconde part, et $3 \times 15 - 24$ ou 21 pour la troisième. $15 + 21 = 36$. $450 - 36 = 414$.

La somme des parties renfermées dans les trois parts est 9. 414 divisé par 9 donne 46 pour la première; $2 \times 46 + 15 = 107$ pour la seconde; $3 \times 107 - 24 = 297$ pour la troisième. $46 + 107 + 297 = 450$.

(206) Les questions du dernier numéro sont ordinairement appelées règles de *double fausse position*, parce qu'on emploie quelquefois pour les résoudre un autre procédé qui nécessite la supposition de deux

nombres étrangers à la question. Mais ce dernier moyen est plus compliqué que celui que nous avons indiqué.

— Partager 239 en trois parties de manière que la seconde soit de 12 plus grande que la première, et que la troisième soit de 20 plus grande que les deux premières ensemble.

Solution. Il suffit de connaître la première partie pour former les autres. Or en supposant que cette première partie soit 1, la seconde sera $1 + 12$ ou 13. La troisième sera $1 + 12 + 20$ ou 33. Les trois parties ensemble feront donc $1 + 13 + 33$ ou 47. Mais puisque les trois parties réelles font 239, il y a une erreur de 192.

Supposons maintenant que la première part soit 3; la seconde sera $3 + 12$ ou 15, et la troisième sera $3 + 12 + 20$ ou 35. La somme des trois parts est $3 + 15 + 35$ ou 53. L'erreur est de 186 au lieu d'être de 192, elle a donc diminué de 6. Or puisque en augmentant de 2 la première partie l'erreur a diminué de 6, de combien faut-il l'augmenter pour que cette erreur diminue de 192? D'où l'on a la proportion. L'augmentation de 2 est à l'augmentation totale x comme 6 est à 192.

$$2 : x :: 6 : 192 ; \; x = 64.$$

Puisqu'il faut augmenter la première supposition de 64, on aura donc 65 pour la première partie, $65 + 12$ ou 77 pour la seconde, et $65 + 12 + 20$ ou 97 pour la troisième. $65 + 77 + 97 = 239$.

§ XIV.

VALEUR AU PAIR DES MONNAIES, ET COMPARAISON DES MONNAIES ÉTRANGÈRES AVEC LES MONNAIES FRANÇAISES.

Tableau comparatif.

Angleterre.

	valeur.	
(207) Guinée de 21 shillings (or).	26 f.	47 c.
Souverain de 20 shillings.	25	20
Couronne (crown) 5 shillings anc. (arg.).	6	18
Shilling ancien.	1	23
Couronne nouvelle	5	80
Shilling nouveau.	1	16

Espagne.

Pistole de 8 écus, 1772 (or). . . .	83	93
Demi-pistole ou écu.	10	49
Pistole de 8 écus depuis 1786. . . .	81	51
Demi-pistole ou écu *idem*.	10	18
Piastre depuis 1772 (arg.).	5	43
Réal de 2 ou piecette.	1	8
Réal de 1 ou demi-piecette.	»	54
Réallillo	»	27

Portugal.

Moeda douro lisbonnine (or). . .	33	96
Demi-lisbonnine (meia moeda). .	16	98
Quart de lisbonnine (quartino). .	8	49

		valeur.
Meia dobra, portugaise.	45 f.	27 c.
Demi-portugaise.	22	63
Pièce de 16 testons.	11	31
Pièce de 12 testons.	8	2
Cruzade de 480 reis.	3	30
Cruzade nouvelle	2	94
1000 reis.	6	12

Italie. Naples.

Once nouveau de 3 ducats (or). . .	12	99
Quintuple de 15 ducats, 1818. . .	64	95
Décuple de 30 ducats, 1818.	129	90
12 carlins de 120 grains, 1804 (arg.)	5	10
Ducat de 10 carlins, 1784.	4	25
2 carlins, 1804.	»	85
1 carlin, 1804.	»	42

Etats de l'Eglise.

Pistole de Pie VI (or).	17	27
Demi-pistole.	8	63
Sequin, 1769, de Clément XIV. .	11	80
Demi-sequin.	5	90
Ecu de 10 pauls ou 100 bayoques (arg.).	5	38
Teston de 30 bayoques.	1	62
Papeto de 20 bayoques.	1	8
Paul ou paolo de 10 bayoques. . .	»	54

Toscane.

Ruspone de 3 sequins aux lys (or).	36	4

	valeur.	
Sequin au lys	12 f.	1 c.
Sequin à l'effigie	12	1
Rosine	21	54
Francescone de 10 paolo, livournine, piastre à la rose, talaro, léopoldine (arg.)	5	61
Pièce de 5 paolo	2	80
de 2 paolo	1	12
de 1 paolo	»	56

Parme.

Sequin (or)	11	96
Pistole de 1784	23	1
Pistole de 1786 à 1791	21	91
40 lire de Marie-Louise dep. 1815.	40	»
20 lire	20	»
Ducat de 1784 et 1796 (arg.)	5	18
Pièce de 3 livres depuis 1790	»	68
de 1 livre 10 sous dep. 1790.	»	34
5 lire depuis 1815	5	»
1 lire	1	»

Gênes.

Sequin (or)	12	1

Sardaigne.

Carlin depuis 1768 (or)	49	33
Demi-carlin	24	66
Pistole	28	45
Demi-pistole	14	22

	valeur.	
Ecu depuis 1768 (arg.)	4 f.	70 c.
Demi-écu	2	35
Livre ou quart d'écu	1	17
Ecu neuf de 5 livres, 1816	5	»

Savoie et Piémont.

Sequin (or)	11	94
Double neuve pistole de 24 livres	30	»
Demi-pistole	15	»
Carlin depuis 1755	150	»
Demi-carlin	75	»
Pistole de 20 livres, 1816	20	»
Ecu de 6 livres depuis 1755 (arg.)	7	7
Demi-écu	3	53
Ecu neuf de 5 livres, 1816	5	»

Venise.

Sequin (or)	12	»
Demi-sequin	6	»
Oselle	47	7
Ducat	7	49
Pistole	21	36
Ducat de 8 livres picolis (arg.)	4	18
Ecu à la croix	6	70
Justine ou ducaton	5	91
Talaro	5	32
Oselle	2	7
Ducat courant ou 124 sous, monnaie courante	3	23
Livre de 20 sous	»	52

Sicile.

		valeur.
Once, onzia depuis 1748 (or). . .	33 f.	73 c.
Ecu de 12 tarins, scudo (arg.). . .	5	10

Raguse.

Talaro ou ragusine (arg.).	3	90
Ducat	1	37
12 grossettes.	»	41
Grossette.	»	3 $\frac{1}{2}$

Autriche et Bohême.

Double ducat (or)	23	72
Ducat	11	86
Souverain	17	58
Maximilien.	14	96
Carolin ou 3 florins..	24	75
Florin d'or	8	25
Dix thalers de Saxe.	40	89
Rixdale ou reichsthaler de conv., 1753 (arg.).	5	19
Florin, demi-rixdale.	2	59
20 kreutzers	»	86
Escalin.	»	52
Batz, 4 kreutzers	»	16
Kreutzer.	»	4

Hollande.

Ducat (or).	11	93
Ryder	31	65

	valeur.	
20 florins, 1808.	43 f.	14 c.
10 florins.	21	57
Florin de 20 sous (arg.).	2	15
Escalin, 6 sous.	»	64
Ducaton ou ryder.	6	85
Ducat ou rixdale.	5	48

Danemarck et Holstein.

Ducat courant, 1767 (or).	9	47
Ducat species, 1791 à 1802. . . .	11	86
Chrétien, 1773.	20	95
Rixdale d'espèce, 96 schell. danois, 1776.	5	66
Rixdale courante, 6 marcs danois, 1750.	4	96
Mark danois de 16 schell., 1776. .	»	94
Mark de Lubeck, 1740.	1	53

Hambourg.

Ducat (or).	11	86
Ducat nouveau.	11	76
Marc banco (arg.), monnaie imaginaire.	1	88
Marc de 16 schellings.	1	53
Rixdale ou écu de banque.	5	78

Prusse.

Ducat (or).	11	77
Frédéric	20	80
Demi-frédéric.	10	40

	valeur.	
Rixdale (arg.) ou écu de 24 bons gros, 1767 à 1807.	3 f.	71 c.
Demi-rixdale ou 12 bons gros. . . .	1	85
Gros.	»	15

Saxe.

Ducat (or).	11	86
Double auguste ou 10 thalers. . . .	41	49
Auguste.	20	74
Rixdale d'espèce depuis 1763 (arg.).	5	19
Florin ou demi-rixdale.	2	59
Thaler de 24 bons gros, monnaie imaginaire.	3	89
Gros.	»	16

Bade.

Pièce de 2 florins (or).	21	4
de 1 florin.	10	52
de 2 florins (arg.)	4	18
de 1 florin.	2	9

Suisse.

32 franken de Suisse (or).	47	63
16 franken de Suisse.	23	81
Ducat de Zurich.	11	77
de Berne.	11	64
Pistole de Berne.	23	76
Ecu de Bâle de 30 batzen (arg.). .	4	56
Florin de 15 batzen.	2	28
Frank.	1	50

		valeur.
Ecu de Zurich.	4 f.	70 c.
Pièce de 4 franken.	6	»
de 2 franken.	3	»
Batz	»	15

Suède.

Ducat (or).	11	70
Demi-ducat.	5	85
Quart de ducat.	2	92
Rixdale d'espèce (arg.), 48 schell.	5	75
Deux tiers de rixdale ou double plotte	3	83
Un tiers ou 16 schellings.	1	91

Russie.

Ducat (or), 1755 à 1763.	11	79
Impériale de 10 roubles, 1755 à 1763.	52	38
Impériale de 10 roubles de 1763. .	41	29
Rouble de 100 kopecks de 1750 à 1762 (arg.).	4	61
Rouble de 100 kopecks, 1763 à 1807.	4	»
Griwna, 10 kopecks.	»	40
Kopeck.	»	4

Etats-Unis d'Amérique.

Double aigle de 10 dollars (or). . .	55	21
Aigle de 5 dollars.	27	60
Demi-aigle.	13	80

		valeur.	
Dollar (arg.)	5 f.	42 c.
Demi-dollar	2	71
Quart de dollar	1	35

Japon (par approximation).

Kobang vieux de 100 mas. (or)	51	24
Kobang nouveau de 100 mas.	32	69
Tigo-gin de 40 mas. (arg.)	14	40

Indes (par approximation).

Roupie du Mogol (or)	38	72
Pagode au croissant	9	46
Pagode à l'étoile	9	35
Ducat de la compagnie hollandaise.	11	62
Roupie du Mogol (arg.)	2	42
Roupie de Madras	2	40
Roupie d'Arcate	2	36
Roupie de Pondichéri	2	42
Fanon des Indes	»	31
Pièce de la compagnie hollandaise.	2	40

Perse (par approximation).

Roupie (or)	36	75
Double roupie de 5 abassis	4	90
Roupie	2	45
Abassi	»	97
Mamoudy	»	48
Larin	1	3

Turquie.

	valeur.	
Sequin zermahboud (or)......	8 f.	72 c.
Nisfie ou $\frac{1}{2}$ zermahboud.......	4	36
Roubbié ou $\frac{1}{4}$ sequin fondoukli...	2	43
L'allmichlec, 60 paras (arg.)....	3	52
Para, 3 aspres............	»	4
Aspre...................	»	$1\frac{1}{3}$
Piastre, 40 paras.........	2	»

(208) Le pair des monnaies sert à en déterminer la valeur en monnaies d'un autre pays, d'après la quantité de matière pure contenue dans la pièce. Or si l'on connaît le titre de la pièce et son poids légal, il sera facile de trouver la quantité de matière pure qu'elle contient. Prenons le franc pour exemple. Son poids est de 5 grammes et son titre de 0,9; donc il contient en matière pure les 9 dixièmes de 5 grammes ou 45 décigrammes d'argent et 5 décigrammes d'alliage.

Pour trouver la quantité de matière pure contenue dans la pistole d'Espagne. Le poids de la pièce est de $27^{gr.},045$. Son titre est de 0,901. Il faudra donc prendre les 901 millièmes de 27,045. A cet effet on en prend la millième partie qui est 0,027045, et on la multiplie par 901, ce qui donne $24^{gr.},367545$ de matière pure.

Si l'on veut savoir quelle est la valeur de cette pièce en monnaie d'or française, on cherchera par le même moyen la quantité de matière pure contenue dans la pièce de 20 fr. Son poids est de 6^{gr},45161, et son titre de 0,9. On trouvera 5^{gr},806449.

D'où l'on a la proportion :

$$5,806449 : 24,367545 :: 20 : x.$$

Dans les tables précédentes nous n'avons pas indiqué le titre ni le poids des pièces étrangères, parce que cela n'appartient pas à notre sujet ; nous indiquons seulement ici le moyen employé pour en déterminer la valeur.

(209) Cette table peut aussi servir à réduire les monnaies étrangères entre elles. Par exemple, si l'on veut savoir combien le carlin de Sardaigne contient de ducats de Hambourg, on trouve que le carlin vaut 49 fr. 33 cent., et que le ducat vaut 11 fr. 86 cent. Donc autant de fois 11, 86 seront contenus dans 49, 33, autant un ducat sera contenu de fois dans un carlin, ce qui détermine la valeur de ce dernier en ducats.

$$4933 \mid 1186 = 4 \text{ ducats}, 15.$$

Comparaison des mesures linéaires et de poids des principales nations de l'Europe avec les nouvelles mesures françaises.

Mesures de poids.

	kilog
Livre, 16 onces.	0,4895
Livre d'Angleterre, troy.	0,3726
Livre d'Angleterre, avoir du poids. .	0,4531
Livre d'Espagne.	0,4594
Livre d'Amsterdam.	0,4914

	kilog.
Livre de Vienne (Autriche).	0,5586
Livre de Suède	0,4246
Livre de Pétersbourg.	0,4085

Mesures de longueur.

	mètres.
Pied anglais.	0,3047
Vare d'Espagne.	0,8366
Pied de Vienne.	0,316
Pied d'Amsterdam	0,283
Pied du Rhin.	0,3139
Pied de Suède	0,2972
Pied de Russie	0,3541

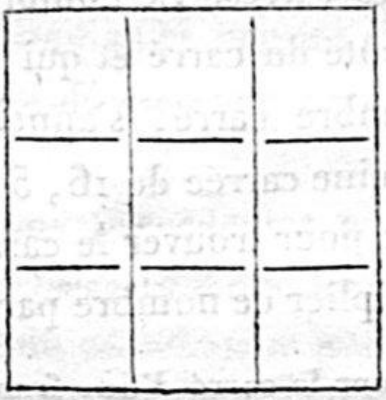
La comparaison des milles anglais et allemands en lieues françaises est à la page 232.

§ XV.

DES NOMBRES CARRÉS ET DES NOMBRES CUBIQUES, ET DE L'EXTRACTION DE LEURS RACINES.

Des nombres carrés.

(210) Le *carré* est une surface dont tous les côtés sont égaux et les angles droits. Une surface carrée, qui a un pied ou un pouce dans tous les sens, s'appelle pied ou pouce carré. Si la surface avait 2 pieds de long sur 2 pieds de large, il est facile de voir qu'elle aurait alors 4 pieds carrés. 3 pieds dans tous les sens donnent 9 pieds carrés.



On voit d'après cela que, pour trouver le nombre de pieds, pouces, etc. carrés renfermés dans une surface parfaitement carrée (nous parlerons plus tard des surfaces d'une autre forme), il suffit de connaître la dimension d'un des côtés, puisque tous les côtés sont égaux, et qu'il faut multiplier cette dimension par elle-même; car supposons que chaque côté soit partagé en 10 parties égales et qu'on joigne les divisions du côté supérieur et du côté inférieur par des lignes verticales, on aura 10 parties; mais si l'on joint ensuite les divisions des côtés de droite et de gauche par des lignes horizontales, chaque rectangle vertical sera partagé en 10 parties, ce qui donnera en tout 100 carrés.

D'après cela on a nommé *nombres carrés* ceux qui sont le produit d'un nombre multiplié par lui-même, ou de deux facteurs égaux; parce qu'on peut toujours considérer l'un des facteurs comme exprimant la dimension d'un côté du carré, et le produit comme exprimant la totalité des petits carrés renfermés dans le carré total. 9 est un nombre carré, parce qu'il est le produit de 3×3. 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, etc., sont des nombres carrés. Le nombre qui exprime la longueur d'un côté du carré et qui est l'un des deux facteurs du nombre carré, s'appelle *racine carrée.* Ainsi 4 est la racine carrée de 16, 5 est la racine carrée de 25. Donc pour trouver le carré d'un nombre, il suffit de multiplier ce nombre par lui-même.

Former le carré d'une fraction.

(211) Supposons que l'on veuille trouver le carré de $\frac{1}{4}$. Si l'on trace une ligne partagée en 4 parties égales et qu'on élève un carré sur cette ligne, il est évident qu'il contiendra 16 petits carrés; il est encore évident que le carré formé sur le quart de la ligne est la seizième partie du carré total; d'où l'on conclut que le carré de $\frac{1}{4}$ est $\frac{1}{16}$ du carré de l'unité.

Ceci est conforme à ce que nous avons dit il y a un instant, que pour former le carré d'un nombre, il faut multiplier ce nombre par lui-même, car $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$. Le carré d'une fraction semble ici être plus petit que cette même fraction, mais on doit observer que la racine carrée $\frac{1}{4}$ exprime une longueur, tandis que le carré $\frac{1}{16}$ exprime une surface qui est la seizième partie du carré de l'unité et non de la racine carrée.

Pour former le carré de $\frac{3}{5}$, supposons une base partagée en 5 parties, sur laquelle on forme le carré. Ce carré total renfermera 25 petits carrés; mais remarquez que le carré formé sur les 3 cinquièmes de la base n'en contient que 9. En effet, on peut considérer les 3 cinquièmes comme 3 unités dont le carré est 9, et les 5 cinquièmes comme 5 unités dont le carré est 25, ce qui donne pour carré de $\frac{3}{5}$ $\frac{9}{25}$ du carré de l'unité.

Des observations précédentes on peut conclure que, pour former le carré d'une fraction, il suffit de prendre le carré du numérateur pour numérateur et le carré du dénominateur pour dénominateur.

Des nombres cubiques.

(212) Le cube est un corps géométrique de la forme d'un dé à jouer, c'est-à-dire qui a la même dimension dans tous les sens. Un corps de cette forme, qui a un pied ou un pouce dans tous les sens, est appelé pied ou pouce cube.

Supposons une ligne de 2 pieds de longueur; nous avons vu (n° 210), que le carré de cette ligne contient 4 pieds carrés; mais pour former le cube il faut avoir une hauteur égale à la largeur; supposons encore, pour plus de clarté, que l'on ait de véritables cubes ayant un pied dans tous les sens, et voyons combien il en faudrait pour former le cube total sur une base de 2 pieds. Il en faudra d'abord 4 pour couvrir la surface de 4 pieds carrés et encore 4 au dessus, ce qui en fait 8 et ce qui forme en effet un corps ayant 2 pieds en tous sens (*).

(*) On vend chez M. Alizau, quai Voltaire, de petits cubes de bois d'environ un pouce, dont on peut se servir avec un grand avantage pour démontrer la formation des cubes. C'est même le seul moyen propre à rendre cette opération sensible.

Supposons une base de 10 pouces sur laquelle on veut élever le cube : le carré de 10 pouces est 100 pouc. carrés. Il faudra donc d'abord 100 petits cubes de 1 pouce pour couvrir cette surface; mais il faudra répéter cette même quantité 10 fois pour avoir une hauteur égale à la largeur, ce qui donne en tout 1000.

On peut voir, d'après cela, que pour former le cube d'un nombre, il suffit de multiplier ce nombre 2 fois par lui-même; car en le multipliant une fois, on a la surface carrée, et en le multipliant encore une fois, on forme ce cube.

D'après cela on appelle *nombres cubiques* ceux qui sont le produit d'un nombre multiplié deux fois par lui-même. Ainsi : $2 \times 2 \times 2 = 8$, 8 est un nombre cubique; $3 \times 3 \times 3 = 27$, 27 est un nombre cubique. Le nombre qui est censé exprimer la longueur d'un des côtés du cube est appelé *racine cubique*. Ainsi 2 est la racine cubique de 8, 3 est la racine cubique de 27, 4 est la racine cubique de 64, parce que $4 \times 4 \times 4 = 64$.

Le carré d'un nombre est appelé seconde puissance de ce nombre; le cube est la troisième puissance; on aura la quatrième, la cinquième, la sixième, etc., puissance d'un nombre, en le multipliant trois, quatre, cinq fois, etc., par lui-même.

Former le cube d'une fraction.

(213) Soit à former le cube de la fraction $\frac{3}{4}$, on peut considérer les trois quarts comme 3 unités dont le cube est 27, et les quatre quarts comme 4 unités

dont le cube est 64. Or si le cube élevé sur les $\frac{3}{4}$ contient 27 parties comme le cube élevé sur l'unité en contient 64, on en conclut que le cube de $\frac{3}{4} = \frac{27}{64}$.

On peut remarquer, d'après cela, qu'on forme le cube d'une fraction en prenant le cube du numérateur pour numérateur et le cube du dénominateur pour dénominateur.

De l'extraction de la racine carrée.

(214) On peut souvent être dans le cas de former le carré sur une base quelconque ou de chercher la dimension d'une surface évaluée en pieds, pouces, etc. carrés. Lorsque la surface est parfaitement carrée, l'opération se réduit à multiplier la dimension d'un des côtés par lui-même. Mais on est obligé aussi de revenir du carré à la racine, c'est-à-dire que connaissant le carré total, on veut savoir sur quelle racine il a été formé; c'est cette opération que l'on appelle *extraction de la racine carrée*.

Cette opération se déduit de la formation même du carré; pour cela nous nous aiderons des observations suivantes :

Les carrés des nombres simples

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
sont 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Le carré de 10 est 100 et celui de 99 est 9801.

Le carré de 100 est 1000 et celui de 999 est 998001.

De ces observations on déduit les suivantes :

1° Les carrés des nombres d'un seul chiffre en ont 2 au plus.

2° Le plus petit nombre exprimé par 2 chiffres, qui est 10, en a 3 à son carré.

3° Le plus grand nombre exprimé par 2 chiffres, qui est 99, en a 4 à son carré.

4° Le plus petit nombre de 3 chiffres, qui est 100, en a 5 à son carré.

5° Le plus grand nombre de 3 chiffres, qui est 999, en a 6 à son carré, etc.

De ces observations on conclut, 1° que tout carré composé de deux chiffres ne doit en avoir qu'un à sa racine; 2° que tout carré composé de 3 ou 4 chiffres doit en avoir 2 à sa racine; 3° que tout carré composé de 5 ou 6 chiffres doit en avoir 3 à sa racine, etc., etc.

On en conclut encore que le carré des unités est toujours exprimé par des unités ou par des dizaines, que le carré des dizaines est toujours exprimé par des centaines ou par des mille, etc.

On conclut encore que 1 est en nombre entier la racine carrée de tous les carrés depuis 1 à 3 inclusivement. La racine carrée de 2 est 1, plus une fraction; il en est de même à l'égard de 3 et de tous les nombres qui ne sont pas des carrés parfaits, et qui ont pour racine en nombre entier la racine du nombre carré qui les précède, plus une fraction. Ainsi la racine carrée de 20 est 4, plus une fraction; celle de 50 est 7, plus une fraction, etc. Les racines des nombres qui ne sont pas des carrés parfaits sont appelées *incommensurables* ou *irrationnelles*, parce que, comme nous le verrons tout à l'heure, on ne peut pas les évaluer exactement.

Observons maintenant ce qui se passe dans la formation du carré, et nous en déduirons la formule au moyen de laquelle on en extrait la racine.

(215) Soit à former le carré de 24.

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times \quad 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 24 \\ \times \quad 24 \\ \hline 16 \\ 8. \\ 8. \\ 4.. \\ \hline 576 \end{array}$$

24 est composé de 20 + 4. En multipliant 24 par 24, remarquez que l'on obtient, 1° le carré des dizaines, 2° le produit des dizaines par les unités et le produit des unités par les dizaines, ou 2 fois le produit des dizaines par les unités, 3° le carré des dizaines.

$$\begin{array}{r|l} 5.7\,6 & 24 \text{ (racine.)} \\ \hline 4\,0\,0 & 4 \\ 1\,7.6 & \\ 1\,6 & \end{array}$$

Pour revenir du carré à la racine, on extraira d'abord la racine des 5 centaines, qui est 2 dizaines ou 20. Le carré exact de 2 dizaines étant 4 centaines, il reste 176 qui doit contenir le carré des unités, plus 2 fois le produit des dizaines par les unités ou le produit du double des dizaines par les unités ; or ce produit ne peut pas être contenu dans les unités du dividende. C'est pourquoi on sépare le dernier chiffre à droite 6 ; 17 doit donc contenir le produit du double des dizaines par les unités ; 17 est donc un produit dont les facteurs sont le double des dizaines et les unités ; donc en divisant 17 par le double des dizaines, qui est 4, on aura pour second facteur 4 qui sont les 4 unités de la racine. Il reste une dizaine qui, ajoutée aux 6 unités, font 16 ; 16 contient le carré des unités. Or la racine carrée de 16 est exactement 4 ; mais nous avons déjà trouvé les unités, cela nous prouve seulement que le nombre 576 est un carré parfait, puisqu'il n'y a point de reste. La preuve se fait naturellement en multipliant 24 par lui-même.

Extraire la racine carrée de 3364.

$$\left.\begin{array}{r} 33.64 \\ 86.4 \\ 64 \\ 00 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 58 \\ \hline 10 \end{array}$$

Ce carré n'étant composé que de 4 chiffres, doit en avoir 2 à sa racine.

Le carré des dizaines étant des centaines ou des mille, il ne peut se trouver que dans les deux derniers chiffres à gauche.

Le carré des unités étant des unités ou des dizaines, il ne peut se trouver que dans les deux chiffres à droite ; c'est pourquoi on les sépare des deux autres par un point.

La racine carrée de 33 est 5 pour 25 et il reste 8 que l'on place sous 33, et à côté duquel on descend les deux chiffres suivants, ce qui fait 864; mais ce reste contient le produit du double des dizaines par les unités, plus le carré des unités. Le produit du double des dizaines par les unités étant des dizaines ou des centaines, ne peut point être renfermé dans le dernier chiffre à droite, c'est pourquoi on le sépare des autres par un point. En divisant 86 par le double des dizaines qui est 10, on reçoit 8 qui est la racine carrée des unités. Il reste 6 qui, joint aux 4 unités, font 64. Ce reste 64 doit contenir le carré des unités; et en effet le carré de 8 est 64, et, puisqu'il ne reste rien, c'est une preuve que le nombre 3364 est un carré parfait.

Nombres carrés dont on s'exercera à prendre la racine.

676	1444	2704	3600	6084
729	1600	2916	4225	6400
1024	2116	3136	4624	9216
1089	2304	3481	5329	9801

(216) Soit à extraire la racine carrée de 60025.

1° Ce nombre composé de 5 chiffres doit en avoir 3 à la racine.

2° Le carré des unités devant être renfermé dans les deux premiers chiffres à droite, celui des dizaines dans les deux suivants, et celui des centaines dans les deux suivants, etc., il s'ensuit qu'on peut partager le nombre de deux en deux chiffres, en commençant par la droite; la dernière tranche à gauche peut n'en contenir qu'un seul, si le nombre des chiffres est impair.

3° Tout nombre peut être décomposé de la manière suivante : par exemple : 634 = 63 dizaines et 4 unités, 38367 = 3836 dizaines et 7 unités.

4° Si dans un nombre, par exemple dans 38367, les 8 mille sont considérés comme 8 unités, les 3 dizaines de mille sont considérées comme 3 dizaines, etc.

6.00.25	245
200	44
242.5	485
2425	
0000	

Après avoir partagé ce carré par tranches, comme il a été indiqué, on extrait la racine carrée du dernier chiffre à gauche, cette racine est 2. Cette racine 2 peut être considérée comme 2 dizaines, et l'on procédera comme dans les opérations précédentes pour avoir le chiffre suivant, qui est censé exprimer des unités. Mais le véritable carré de 2 étant 4, il reste 2 à côté duquel on abaisse la tranche suivante, ce qui fait 200. Divisant 20 par 4 double des dizaines, on reçoit 4 pour quotient ou pour racine carrée des unités (*).

(*) 4 est bien réellement contenu 5 fois dans 20 ; mais 5 est trop fort ; nous indiquerons dans un instant comment on peut reconnaitre qu'un chiffre de la racine est ou trop fort ou trop faible.

On pose ce 4 à la racine et à côté du double des dizaines, ce qui fait 44. Or ce nombre 44 renferme le double des dizaines, plus les unités, et le dividende 200 renferme le double des dizaines multiplié par les unités, plus le carré des unités; donc en multipliant 44 par 4, nombre des unités, on reçoit 176 qui renferme exactement le double des dizaines multipliées par les unités et le carré des unités. On soustrait 176 de 200 et il reste 24, à côté duquel on abaisse la tranche suivante, ce qui donne 2425. Remarquez bien que nous n'avons pas divisé 200 par le double des dizaines, mais 20 seulement; parce que 200 étant censé exprimer un nombre d'unités, le double des dizaines de la racine multiplié par les unités ne peut se trouver que dans les 20 dizaines du dividende. Cette division donne les unités de la racine. Remarquez encore que le nombre 44, placé sous la racine, renferme le double des dizaines et les unités; c'est pourquoi, en le multipliant par 4, on reçoit 176, nombre qui renferme le carré des unités et produit du double des dizaines par les unités. C'est encore pourquoi on soustrait ce nombre du dividende total 200.

Actuellement le dividende est 2425. Le nombre 24, placé à la racine, sera considéré comme 24 dizaines et le chiffre cherché comme des unités. On procédera comme précédemment: 2425 renferme le produit du double des dizaines par les unités; ayant séparé le dernier chiffre à droite par un point, il reste 242 que l'on divise par 48, double des 24 dizaines (on place 48 sous 44). Le quotient 5 indique les unités de la racine : on le place donc à la racine et à côté de 48, ce qui donne 485. En multipliant 485 par 5, on reçoit 2425 qui renferme exactement le produit du double des dizaines par les unités et le carré des unités. En le soustrayant du dividende 2425, il ne reste rien, ce qui prouve que le carré total 60025 est un carré parfait.

(217) Tout carré, quelque grand qu'il soit, peut être considéré comme composé de dizaines et d'unités, ainsi que la racine. Le premier chiffre à droite, exprimant les unités et tous les autres des dizaines. Il suit de là que lorsque la racine a plus de 2 chiffres, on considère tous les chiffres trouvés comme exprimant des dizaines et le chiffre cherché comme exprimant des unités. On a alors pour diviseurs partiels le double des dizaines, c'est-à-dire le double des chiffres déjà trouvés à la racine; d'où l'on conclut que tout carré, quelque grand qu'il soit, est toujours considéré comme composé de ces trois parties : 1° le carré des dizaines; 2° le produit du double des dizaines par les unités; 3° le carré des unités.

(218) Dans l'opération précédente, c'est-à-dire dans l'extraction de la racine de 60025, nous avons trouvé 4 pour le second chiffre de la racine au lieu de 5, que l'on semblait devoir mettre, puisque 4, double de la racine des dizaines, est contenu 5 fois dans 20. Mais ayant à soustraire de 200 le produit du double des dizaines par les unités, plus le carré des unités, il aurait fallu soustraire le produit de 45×5, ce qui ne se peut, puisque $45 \times 5 = 225$.

On conclut de là qu'un chiffre de la racine est trop fort lorsque le produit du double des dizaines par les unités et le carré des unités ne peuvent pas être soustraits du dividende partiel. Ce cas est semblable à celui de la division, lorsque le produit du diviseur par le chiffre du quotient que l'on vient de trouver ne peut pas être soustrait du dividende partiel.

On connaîtra de même qu'un chiffre de la racine est trop faible, lorsqu'après avoir soustrait du dividende partiel le produit du double des dizaines par les unités et le carré des unités, on trouve un reste trop fort, ce dont il est facile de s'assurer, parce que ce reste doit être au moins de 1 plus grand que le double de la partie de la racine déjà trouvée. La division présente un cas semblable.

(219) Un autre cas qui pourrait encore embarrasser, c'est lorsqu'après avoir abaissé les deux chiffres suivants à côté du reste et avoir séparé le dernier chiffre sur la droite, on ne peut pas diviser le dividende partiel par le double de la racine.

Il faut alors mettre un zéro à la racine et à côté du double de la racine, descendre la tranche suivante à côté de la précédente, et continuer l'opération comme il a été indiqué.

Opérations toutes faites.

(220)

7.1 7.1 6.8 4	2678
3 1.7	46
2 7 6	527
4 1 1.6	5348
3 6 8 9	
4 2 7 8.4	
4 2 7 8 4	
0 0 0 0 0	

25.80.6 4	508
80 6.4	1008
80 6 4	
00 0 0	

82.62.8 1	909
2 62 8.1	1809
1 62 8 1	
0 00 0 0	

61.3 4.0 2.2 4	7832
12 3.4	148
11 8 4	1563
5 0 0.2	15662
4 6 8 9	
3 1 3 2.4	
3 1 3 2 4	
0 0 0 0 0	

Opérations à faire.

(221) **Les nombres suivants dont il faut extraire la racine carrée étant des carrés parfaits, on aura la preuve de l'exactitude de l'opération lorsque celle-ci ne présentera point de reste.**

381924	324900	255025	11594025
385641	293764	258064	7403841
396900	277729	280900	1442401
360000	252004	306916	31360000
16160400	61058596	50580544	18671041

Racines irrationnelles ou incommensurables.

(222) On appelle ainsi les racines qui ne peuvent pas être prises exactement, c'est-à-dire celles des nombres qui ne sont pas des carrés parfaits; mais on en approche aussi près que l'on veut par le moyen des décimales. L'opération est analogue à celle de la division, qui présente un reste ; plus on met de décimales, plus le quotient est exact. Si l'on en met une, on a le quotient à un dixième près ; deux décimales donnent le quotient à un centième près ; trois décimales le donnent à un millième près, etc. Or supposons qu'on veuille avoir une racine incommensurable à un dixième près, c'est-à-dire avec un chiffre décimal ; le chiffre qui exprime les dixièmes peut être regardé comme des unités, celui des unités comme des dizaines, celui des dizaines comme des centaines, etc. Puisqu'on partage le carré par tranches de deux chiffres, et que chaque tranche produit un chiffre à la racine, on ajoutera donc à droite du carré une nouvelle tranche composée de deux zéros. En un mot on ajoute à la droite du carré autant de fois 2 zéros qu'on veut avoir de décimales à la racine. L'opération ne diffère ensuite en aucune manière des précédentes. On a soin de séparer sur la droite de la racine autant de décimales qu'on a ajouté de tranches de deux zéros.

Soit à extraire la racine carrée de 367812 à un millième près.

36.78.12.00.00.00	606,475
781.2	1206
7236	12124
5760.0	121287
4849.6	1212945
91040.0	
849009	
613910.0	
6064725	
74375	

Pour avoir la racine d'un nombre à un millième près, il faut ajouter 3 tranches ou 6 décimales. Après avoir trouvé que la racine de 367812 est en nombres entiers 606, et qu'il reste 576, on abaisse les deux zéros suivants, on sépare le dernier chiffre sur la droite, et l'on divise 5760 par 1212, double de la racine 606. On trouve pour quotient 4, que l'on pose à côté de 1212. On multiplie ensuite 12124 par 4, ce qui donne 48496, que l'on soustrait de 57600, et à côté du reste 9104 on abaisse la tranche suivante, etc. A la fin de l'opération le reste 74375 peut être négligé, à moins que l'on veuille avoir un plus grand nombre de décimales.

Racine carrée des fractions.

(223) Puisque pour former le carré d'une fraction il faut prendre le carré du numérateur pour numérateur, et celui du dénominateur pour dénominateur, il est évident que pour retourner du carré à la racine il faut prendre la racine carrée des deux termes. La

racine carrée de $\frac{9}{25}$, par exemple, est donc $\frac{3}{5}$. En effet, le carré du numérateur ayant 9 parties comme celui de l'unité en a 25, la racine du numérateur aura 3 parties comme l'unité en a 5.

Mais il peut arriver, ce qui même est le plus ordinaire, que l'un des deux termes ou tous les deux ne soient pas des nombres carrés, ce qui donne lieu à trois cas différents.

(224) *Premier cas.* Si le dénominateur seul est un nombre carré, comme dans $\frac{7}{25}$. Il faut alors extraire la racine du numérateur par approximation, et celle du dénominateur sera exactement 5. Il faut toujours que la racine du dénominateur soit exacte. La racine carrée de 7 est 2,64, et la racine de $\frac{7}{25}$, $= \frac{2,64}{5}$ ou 2 cinquièmes + 64 centièmes de cinquième. On peut faire disparaître le dénominateur 5 en divisant 2,64 par 5, ce qui donne 0,528; car en supprimant simplement le dénominateur, on obtiendrait 2 entiers 64 centièmes, nombre cinq fois trop fort, et auquel on rend sa véritable valeur en le divisant par 5.

(225) *Deuxième cas.* Si le numérateur seul est un nombre carré, comme dans $\frac{9}{10}$. Il faut dans ce cas changer l'expression de la fraction de manière à avoir un nombre carré pour dénominateur, ce qui, comme nous l'avons dit tout à l'heure, est indispensable. A cet effet on multiplie les deux termes de la fraction par son dénominateur, ce qui donne $\frac{90}{100}$; par ce moyen le dénominateur se trouve carré, et la fraction n'a pas changé de valeur. On procède alors pour

l'extraction de sa racine comme dans le cas précédent ; on trouve 0,948.

(226) *Troisième cas.* Si aucun des termes n'est un carré parfait, comme $\frac{3}{5}$. Par le moyen indiqué dans le deuxième cas, on change l'expression de la fraction de manière à avoir un nombre carré pour dénominateur, ce qui se fait en multipliant les deux termes par le dénominateur ; on aura $\frac{15}{25}$, dont la racine carrée approximative est en décimales 0,1548.

Racine carrée des fractions décimales.

Soit à extraire la racine carrée de 25,48. Puisque lorsqu'on veut extraire une racine carrée irrationnelle au moyen des décimales, il faut ajouter à droite du carré deux fois autant de zéros qu'on veut avoir de chiffres décimaux à la racine, de même lorsqu'il s'agit d'extraire la racine d'une quantité décimale, il faut ajouter des zéros à droite, de manière à avoir au carré deux fois autant de décimales qu'on veut en avoir à la racine, et que le nombre des décimales soit pair. L'opération est alors semblable à celle des nombres entiers.

Si l'on veut extraire la racine carrée du nombre ci-dessus à un millième près, c'est-à-dire si l'on veut avoir 3 décimales, il faut ajouter 4 zéros. On extraira la racine de 25480000, sur la droite de laquelle on séparera 3 décimales. Le résultat est 5,047.

Extraire la racine de 0,2 à un cent-millième près.

0,20.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0	0,44721
40.0	84
336	887
640.0	8942
6209	89441
1910.0	
17884	
12160.0	

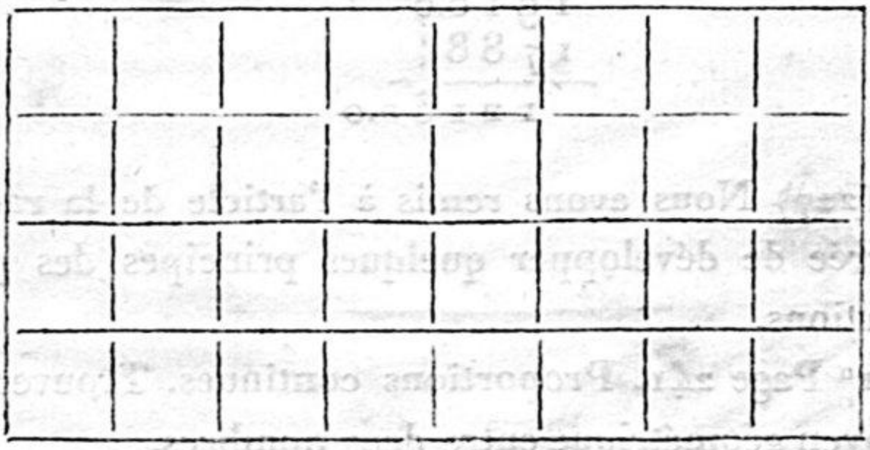
(227) Nous avons remis à l'article de la racine carrée de développer quelques principes des proportions.

1° Page 241. Proportions continues. Trouver un moyen géométrique entre deux nombres.

Soit la proportion 3 : 6 : : 6 : 12 ou ∺ 3 : 6 : 12. Puisque dans toute proportion le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, et puisque dans une proportion continue les deux moyens sont égaux, il est évident que le produit des moyens doit être un carré. Or puisque ce carré est égal au produit des extrêmes, en prenant la racine carrée du produit des extrêmes, on trouvera le terme moyen. Donc pour insérer un moyen géométrique entre deux nombres, c'est-à-dire trouver un nombre qui soit le terme moyen d'une proportion géométrique continue dont les deux nombres connus sont les extrêmes, il faut multiplier ces deux nombres l'un par l'autre, et en extraire la racine carrée.

2° On doit comprendre maintenant le principe énoncé n° 177, que les carrés et les cubes des termes d'une proportion sont aussi en proportion, ce dont il est facile de s'assurer par les moyens que nous connaissons.

De la mesure des parallélogrammes rectangles et du cercle.



(228) Un *parallélogramme rectangle* est une figure semblable à celle ci-dessus, dont les côtés sont égaux, parallèles deux à deux, et dont les angles sont droits.

— Une surface semblable à la précédente a 8 pieds de long sur 4 pieds de large; on demande combien elle contient de pieds carrés en tout?

Il est facile de voir par la figure ci-dessus qu'on obtiendra la mesure de cette surface en multipliant la longueur 8 par la largeur 4, ce qui donne 32 pieds carrés.

En général pour connaître la mesure d'une surface rectangulaire il suffit de multiplier la longueur par la largeur. Cette opération ne diffère de la formation des carrés qu'en ce que les deux facteurs ne sont pas égaux. Ainsi une surface de 100 pieds de longueur sur 10 de largeur contiendra 10×100 ou 1000 pieds carrés.

— Combien une toise carrée contient-elle de pieds carrés?

Rép. Puisqu'une toise linéaire a 6 pieds, il suffit de former le carré de 6 qui est 36.

— Combien une toise carrée contient-elle de pouces carrés?

Rép. Une toise linéaire contient 72 pouces, donc une toise carrée contiendra 72×72 ou 5184 pouces carrés.

On trouverait le même résultat en multipliant le nombre des pieds carrés par le nombre des pouces carrés contenus dans un pied carré, c'est-à-dire par 144. En effet $144 \times 36 = 5184$.

Pour trouver combien une toise carrée contient de lignes carrées, il faut multiplier le nombre des pouces carrés qu'elle contient par le nombre des lignes carrées contenues dans un pouce. $5184 \times 144 = 746496$ lignes carrées. Ou bien, sachant qu'une toise contient 864 lignes linéaires, on obtiendra le même résultat en formant le carré de 864. $864 \times 864 = 746496$.

— Une surface a 3 pieds 8 pouces de long sur 2 pieds 4 pouces de large; combien contient-elle de pieds et pouces carrés?

Solution. 3 pieds 8 pouces $= 44$ pouces; 2 pieds 4 pouces $= 28$ pouces. Cette surface a donc 44 pouces de long sur 28 pouces de large, ce qui fait 44×28 ou 1232 pouces carrés. Puisqu'il faut 144 pouces carrés pour faire un pied, autant on aura de fois 144 dans 1232, autant on aura de pieds carrés. $1232 \mid 144 = 8$ pieds 80 pouces carrés.

— Une surface a 3 toises 4 pieds 5 pouces de long sur 2 toises 6 pieds 8 pouces de large ; combien contient-elle de toises, pieds, pouces carrés?

Solution. 3 toises 4 pieds 5 pouces = 269 pouces de long; 2 toises 6 pieds 8 pouces = 224 pouces de large. 269 × 224 = 60256 pouces carrés. 1 toise = 5184 pouces carrés. Donc 60256 | 5184 = 11 toises carrées, et il reste 3232 pouces carrés; 3232 | 144 = 22 pieds carrés, et il reste 64 pouces. Donc cette surface contient 11 toises 22 pieds 64 pouces carrés.

(229) — Une surface contient 72 toises carrées; elle a 6 toises de large; quelle est sa longueur?

Solution. Puisque 72 est le produit de deux nombres dont l'un est 6, on trouvera l'autre facteur en divisant 72 par 6, ce qui donne 12 toises pour la longueur de cette surface.

Mais remarquez que l'on ne pourrait pas trouver la dimension d'un des côtés, si l'on ne connaissait pas celle d'un autre côté; car les facteurs peuvent souvent se combiner de beaucoup de manières. Si cette surface, par exemple, eût eu 2 toises de large sur 36 toises de long, ou 8 toises de large sur 9 toises de long, elle aurait eu de même 72 toises carrées.

(230) Pour connaître la superficie d'un cercle, il faut multiplier la circonférence par le quart de son diamètre (*).

(*) La démonstration de ce théorème appartient à la géométrie et non à cet ouvrage.

Quelle sera donc la superficie d'un bassin qui a 100 mètres de circuit et 33 mèt. 33 de diamètre?

Le quart de 33,33 est 8,3325. 8,3325 $\times$ 100 = 833,25 mètres carrés.

On trouve le diamètre d'un cercle en prenant le tiers de la circonférence ; ou connaissant le diamètre, on peut trouver la circonférence.

Exercices sur l'extraction de la racine carrée.

carré.	racine.	carré.	racine.
367	19,1569	3678	60,6459
401	20,025	2	1,1419
369	19,2091	10	3,1627
900	30,0000	20	4,4721
1000	31,6265	3678,42	60, $\frac{465}{718}$
3729	61,0642	2100,07	45, $\frac{158}{191}$
5200	72,11	123543	351,4846
9925	99,6225		

Théorie de la racine carrée.

(231) Le carré d'un nombre est le produit de ce nombre multiplié par lui-même, ou le produit de deux facteurs égaux.

Chacun des facteurs d'un nombre carré peut être considéré comme exprimant la dimension ou la longueur d'un côté d'un carré, et le produit comme exprimant la totalité de la surface carrée. La longueur d'un des côtés, exprimée par l'un des facteurs, est appelée *racine carrée*.

Lorsqu'on connaît la totalité d'un carré, on a souvent besoin de chercher la racine sur laquelle il a été formé; c'est ce qu'on appelle extraire la racine carrée. Lorsque la racine ne peut pas s'extraire exactement, elle prend le nom de racine *irrationnelle* ou *incommensurable*.

On forme le carré d'une fraction en formant le carré de chaque terme.

Pour l'extraction de la racine carrée, on s'aide des principes suivants, qui sont des résultats d'observations.

1° Tout nombre composé d'un seul chiffre en a un ou deux à son carré.

2° Tout nombre composé de deux chiffres en a trois ou quatre à son carré.

3° Tout nombre composé de trois chiffres en a cinq ou six à son carré, etc.

Il suit de là que

1° Le carré des unités est exprimé par des unités ou des dizaines.

2° Le carré des dizaines est exprimé par des centaines ou des mille.

3° Le carré des centaines est exprimé par des centaines de mille ou des dizaines de mille, etc.

Il suit encore que dans un nombre dont on veut extraire la racine carrée,

1° Les unités de la racine ne peuvent se trouver que dans les unités ou dans les dizaines du carré.

2° Les dizaines de la racine ne peuvent se trouver que dans les centaines ou dans les mille du carré.

3° Les centaines de la racine ne peuvent se trouver que dans les dizaines de mille ou dans les centaines de mille du carré, etc.

En observant la manière dont se compose le carré d'un nombre par la multiplication de la racine par elle-même, on remarque que le carré est composé 1° du carré des unités; 2° du produit du double des dizaines par les unités; 3° du carré des dizaines.

D'après ces différents principes, on a conclu la formule au moyen de laquelle on extrait la racine carrée d'un nombre.

Observation. Il serait impossible de donner dans une théorie aussi restreinte que celle-ci une explication de la formule; je renvoie pour cela aux développements, page 521 et suivantes.

La formule peut présenter plusieurs cas.

1° Lorsque le nombre dont on extrait la racine n'est pas un carré parfait. On en extrait alors la racine approximativement au moyen des décimales. On ajoute à droite du carré autant de fois deux zéros qu'on veut avoir de décimales à la racine.

2° Lorsque le carré a des décimales.

On rend le nombre de ces décimales pair au moyen de zéros, et double en même temps de celui que l'on veut avoir à la racine.

3° Lorsque le carré est une fraction.

On extrait la racine carrée de chaque terme. Si le dénominateur n'est pas un carré, on le rend tel en multipliant les deux termes de la fraction par ce même dénominateur. Si le numérateur n'est pas un nombre carré, on en extrait la racine approximativement au moyen des décimales. On fait ensuite disparaître le dénominateur en divisant le numérateur par ce même dénominateur, ce qui met la racine sous l'expression d'une seule fraction décimale.

On obtient la mesure d'une surface qui a la forme d'un parallélogramme en multipliant la hauteur par la largeur.

Pour connaître la surface d'un cercle il faut multiplier la circonférence par le quart du diamètre.

Questions sur la racine carrée.

(232) 1° Qu'est-ce qu'un nombre carré (210)?

2° Comment peut-on envisager les facteurs du nombre carré (210)?

3° Qu'est-ce que la racine carrée (210)?

4° Qu'est-ce que extraire la racine carrée (214)?

5° Qu'appelle-t-on racine irrationnelle ou incommensurable (322)?

6° Comment forme-t-on le carré d'une fraction?

7° Expliquez comment il se fait que le carré d'une fraction soit en apparence plus petit que la racine?

8° Quel est le nombre des chiffres du carré suivant le nombre des chiffres de la racine (214)?

9° Dans quelle partie du carré se trouvent les unités, les dizaines ou les centaines de la racine (214)?

10° Comment les carrés sont-ils composés par la multiplication de la racine par elle-même (215)?

11° Comment connaît-on qu'un chiffre de la racine est trop fort ou trop faible (218)?

12° Comment extrait-on la racine carrée d'un nombre qui n'est pas un carré parfait (222)?

13° Pourquoi doit-on ajouter au carré un nombre de zéros double de celui des décimales que l'on veut avoir à la racine (222)?

14° Comment extrait-on la racine carrée d'une quantité décimale (pag. 332)?

15° Comment extrait-on la racine carrée d'une fraction (223)?

16° Quels sont les différents cas que peut présenter l'extraction de la racine carrée d'une fraction, et développez-les (224, 225, 226)?

17° Comment insère-t-on un moyen géométrique entre deux nombres (227)?

18° Comment obtient-on la mesure de la superficie d'un parallélogramme (228)?

19° Comment obtient-on la mesure de la superficie d'un cercle (230)?

Racine cubique.

(233) Nous avons déjà vu au commencement des nombres carrés (212) l'explication du cube et la manière dont on le forme. Nous avons vu de même que la racine cubique est le nombre qui est censé exprimer la longueur d'une des arêtes du cube.

Avant de nous occuper spécialement de l'extraction de la racine cubique, nous dirons deux mots de la formation du cube des fractions.

Soit une ligne partagée en 12 parties ; 1 pied, par exemple, sur lequel on élève un cube. On formera d'abord le carré qui contiendra 12×12 ou 144 pouc. carrés, puis le cube qui contient 144×12 ou 1728 pouces cubes. On peut considérer le pied comme une unité et le pouce comme une fraction; or le cube élevé sur 12 pouces ou sur $\frac{12}{12}$ contient 1728 parties, et le cube élevé sur 1 pouce ou sur $\frac{1}{12}$ n'en contient qu'une. Donc le cube de $\frac{1}{12} = \frac{1}{1728}$.

Si on élève le cube sur 2 pouces ou sur $\frac{2}{12}$, on aura 8 pouces cubes ou $\frac{8}{1728}$. Le cube de $\frac{3}{12}$ sera par conséquent $\frac{27}{1728}$.

Pour former le cube de $\frac{4}{5}$ on peut considérer le numérateur comme 4 unités dont le cube est 64, et le dénominateur comme 5 unités dont le cube est 125. Le cube de $\frac{4}{5}$ est donc $\frac{64}{125}$ du cube de l'unité.

De ces observations on conclut que pour cuber une fraction, il faut former le cube de chaque terme.

De l'extraction de la racine cubique.

(234) Pour bien comprendre l'extraction de la racine cubique, il faut se pénétrer de la manière dont se compose le cube par la multiplication de ses facteurs.

En examinant la formation du cube d'après le nombre des chiffres de la racine, on verra que 1° tout nombre composé d'un seul chiffre en a 1 ou 3 à son cube.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	27	64	125	216	343	512	729

2° Tout nombre composé de 2 chiffres en a 4 ou

6 à son cube. Le cube de 10 est 1000, celui de 999 est 970299.

3° Tout nombre composé de 3 chiffres en a 7 ou 9 à son cube. Le cube de 100 = 1000000, celui de 999 = 997002999.

4° Tout nombre composé de 4 chiffres en a 10 ou 12 à son cube. Le cube 1000 = 1000000000, celui de 9999 = 999700029999.

On conclut de là que puisqu'un chiffre de plus à la racine augmente le cube de 3 chiffres, les unités de la racine ne peuvent se trouver que dans les trois premiers chiffres à droite du carré; les dizaines de la racine ne peuvent être que dans les trois suivants, ainsi de suite. C'est pourquoi avant d'extraire la racine d'un nombre on le partage par tranches de trois chiffres, en commençant par la droite.

(235) Soit à former le cube de 24.

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \\ \times\ 24 \\ \hline 2304 \\ 1152 \\ \hline 13824 \end{array}$$

En examinant la formation du cube 13824, on verra qu'il est composé du carré de 24 multiplié par 24; et le carré étant composé du carré des unités, du double des dizaines multipliées par les unités et du carré des dizaines, il suit que le cube est composé 1° du cube des unités; 2° de trois fois le carré des dizaines multiplié par les unités; 3° de trois fois les dizaines multipliées par le carré des unités; 4° du cube des dizaines.

Or s'il s'agit d'extraire la racine cubique de 13824, on partagera d'abord ce nombre par tranches, comme on l'a indiqué plus haut.

$$\begin{array}{r|l}
13.824 & 24 \text{ (racine.)} \\
8 & \overline{12} \\
\hline
58.24 & \\
1024 & \\
1024 & \\
\hline
0000 &
\end{array}$$

Le cube des dizaines ne peut se trouver renfermé que dans la tranche à gauche. On prendra donc la racine cubique de 13, qui est 2. On forme le cube de 2 et on le soustrait de 13, il reste 5; on abaisse à côté la tranche suivante, ce qui donne 5824. Ce reste doit contenir les trois autres parties du cube, c'est-à-dire trois fois le carré des dizaines multiplié par les unités; trois fois le produit des dizaines multipliées par le carré des unités et le cube des unités. Mais la seconde partie du cube, c'est-à-dire le triple du carré des dizaines multiplié par les unités, ne peut se trouver dans les deux derniers chiffres à droite; car le carré des dizaines étant des centaines, le triple de ce carré doit être aussi des centaines, c'est pourquoi on sépare les deux derniers chiffres à droite par un point. On place sous la racine le triple du carré de 2, qui est 12. Or puisque 58 est un produit dont 12 est un facteur, et les unités inconnues l'autre facteur, on trouvera ces unités en divisant 58 par 12. Le quotient est 4, que l'on place aux unités de la racine. Il reste 10; on abaisse à côté les deux chiffres que l'on avait séparés sur la droite du reste. Nous avons trouvé la racine; mais ce dernier reste contient les deux dernières parties du cube. Or si on les retranche de ce reste, il ne doit rien rester si l'opération est exacte, parce que 13824 est un cube parfait.

Les deux autres parties du cube sont : trois fois les dizaines multipliées par le carré des unités et le cube des unités. On prendra donc le triple de 2 ou plutôt de 20, qui est 60, et on le multipliera par 16, carré des unités; on reçoit 960. Le cube des unités est 64. $960 + 64 = 1024$. Donc la racine 24 est exacte.

En appliquant le raisonnement précédent aux nombres suivants, il sera facile d'en extraire la racine, ces nombres étant tous des cubes parfaits.

4913	10648	27000	9261
5812	12267	21952	1728
8000	13824	24389	17576

(236) Lorsque la racine a plus de deux chiffres, on se conduit comme on l'a fait pour la racine carrée; c'est-à-dire que l'on considère la racine comme composée de dizaines des unités; le chiffre cherché étant censé exprimer des unités, et tous les chiffres trouvés exprimant des dizaines (216).

*

```
41.0 63.6 25 } 345
27           } 27
14 0.63        3468
12 3 04
   1 7 596.25
   1 7 596 25
   0 0 000 00
```

Le cube ayant 8 chiffres indique qu'il doit y en avoir 3 à la racine. On le partage par tranches de 3 chiffres. Puisqu'on se conduit comme si le nombre ne devait avoir que 2 chiffres, on fait pour le moment abstraction de la dernière tranche à droite.

La racine cubique de 41 est 3, que l'on pose à la racine. Le cube de 3 est 27, on le retranche de 41, il reste 14; on abaisse la tranche suivante, ce qui donne 14063, qui doit contenir les 3 autres parties du cube. On sépare par un point les deux chiffres de la droite, parce que le triple produit du carré des dizaines par les unités ne peut se trouver dans ces deux chiffres. 3 fois le carré des dizaines donne 27. 27 est contenu 4 fois dans 140 (il y est bien réellement contenu 5 fois; mais nous allons voir comment on peut s'assurer qu'un chiffre de la racine est trop fort ou trop faible). $4 \times 27 = 108$. $140 - 108 = 32$. Le reste total est 3263, qui doit contenir les deux autres parties du cube. Mais pour éviter une double opération, il faut rechercher les deux autres parties du cube, les ajouter à 108 et retrancher le tout de 14063. 1° Trois fois les dizaines ou 90 multipliées par le carré des unités ou 16. $16 \times 90 = 1440$. 2° Le cube des 4 unités ou 64. Remarquez que

108 devant être soustrait de 140 centaines et non de 14063, exprime des centaines, et qu'il faut le considérer comme 10800. Or 10800 + 1440 + 64 = 12304, qui soustrait de 14063 donne 1759 pour reste. Si le nombre qui exprime les trois dernières parties du cube n'avait pas pu être soustrait de 14063, c'eût été une preuve que le chiffre placé à la racine était trop fort.

A côté du reste 1759 on abaisse la tranche suivante, ce qui donne 1759625, dont on sépare les deux derniers chiffres sur la droite. Maintenant, considérant la partie trouvée de la racine comme 34 dizaines, on divise 17596 centaines par le triple carré de 34, ce qui donnera les unités de la racine. Le triple carré de 34 est 3468 centaines que l'on place sous la racine ; le quotient est 5. 5 fois 3468 font 17340 centaines ou 1734000 ; à ce produit on ajoute les deux autres parties du cube. 1° 3 × 34 dizaines = 102 dizaines ou 1020. 1020 × 25, carré des unités, = 25500. 2° Le cube de 5 = 125. 1734000 + 25500 + 125 = 1759625. Cette somme retranchée de 1759625, il ne reste rien.

(237) Opérations toutes faites.

182.284.263	567	344.472.101	701
125	75	343	147
57 2.84	9408	14.72 1.01	14700
50 6 16		1 4 72 1 01	
6 6 68 2.63		0 0 00 0 00	
6 6 68 2 63			
0 0 00 0 00			

Opérations à faire.

(238) Les nombres suivants sont des cubes parfaits dont on s'exercera à tirer la racine.

30080231	146363183	30138300928
28094464	132651000	358213545208
134217728	133432831	1458274104
42508549	166375000	216108018001

Racine cubique des nombres incommensurables.

(339) Lorsque le nombre dont il faut prendre la racine n'est pas un cube parfait, on la tire approximativement au moyen des décimales, comme on l'a fait pour la racine carrée. Si l'on ne veut avoir qu'un chiffre décimal à la racine, c'est-à-dire si l'on veut se borner aux dixièmes, on peut considérer les dixièmes comme des unités, les unités comme des dizaines, etc., et comme chaque tranche de 3 chiffres produit un chiffre à la racine, on ajoute une nouvelle tranche de 3 zéros à droite du nombre dont on veut extraire la racine; on ajoutera par la même raison autant de fois 3 zéros qu'on veut avoir de décimales, et l'opération ne diffère en rien des précédentes. On a soin de séparer sur la droite de la racine autant de chiffres décimaux qu'on a ajouté de tranches à la droite du cube. Le reste que présente l'opération peut être négligé.

Soit à extraire la racine cubique de 4 à 1 centième près, c'est-à-dire avec 2 décimales.

```
 4.0 00.0 00 } 158
 1           } 3
 -----
 3 0.00        675
  2 3 75
 --------
   6 25 0.00
   5 69 3 12
 -----------
     55 6 88
```

En formant le cube de la racine 158, et en y ajoutant le reste 55688, on retrouve 4, ce qui prouve que l'opération est exacte.

Racine cubique des fractions décimales.

(240) Puisque pour tirer une racine cubique approximative il faut ajouter au nombre proposé autant de fois trois zéros qu'on veut avoir de décimales à la racine, lorsque le nombre proposé a déjà des décimales, il faut ajouter à sa droite autant de zéros que cela est nécessaire pour former autant de tranches de 3 chiffres à droite des unités qu'on veut avoir de décimales à la racine. Ainsi soit à tirer la racine de 10,34 à un centième près, on ajoutera quatre zéros, ce qui donne 10,340,000 avec 2 tranches de 3 chiffres pour les décimales.

Considérant ensuite 10340000 comme un nombre entier, on en extrait la racine comme on l'a indiqué, et l'on sépare deux décimales sur la droite de la racine.

cube.	racine.	cube.	racine.
2	1,259911	18,47	2,643312
3	1,442233	22,48	2,822266
5	1,709961	10,01	2,1551
6	1,817125	141,2	5,20725
10	2,1544	280,001	6,542142

Racine cubique des fractions.

(241) Nous avons vu (233) que pour former le cube d'une fraction il fallait cuber chaque terme. Il s'ensuit que pour extraire la racine cubique d'une fraction, il faut extraire celle de chaque terme. Cette opération présente aussi trois cas comme la racine carrée.

1° Lorsque les deux termes sont des cubes parfaits comme $\frac{8}{27}$; la racine est $\frac{2}{3}$.

2° Lorsque le numérateur seul n'est pas un cube parfait comme $\frac{10}{64}$.

On extrait alors la racine approximative du numérateur, et on lui donne pour dénominateur la racine de ce terme. On fait ensuite disparaître le dénominateur par le moyen indiqué n° (224).

3° Lorsqu'aucun des termes n'est un cube parfait comme $\frac{15}{24}$.

On multiplie les deux termes par le carré du dénominateur, ce qui ne change rien à la valeur de la fraction, et par ce moyen on a un cube parfait pour dénominateur. L'opération est analogue à celle précédente.

Solidité du parallélipipède et de quelques autres solides.

(242) On appelle parallélipipède un corps de forme cubique, mais plus long dans un sens que dans un autre.

Soit donc, par exemple, un bloc de pierre de 5 pieds de long sur 3 de large et 2 de hauteur, on demande combien il contient de pieds cubes?

Pour bien comprendre la solution de cette question, supposons que nous ayons un certain nombre de corps ayant chacun un pied cube, et voyons combien il en faudrait pour former un autre corps de la dimension de celui dont il est question. Une base de 5 pieds de long sur 3 de large donne 15 pieds carrés (228).

Il faudra donc 15 cubes de 1 pied chaque pour couvrir cette base; mais il en faudra autant de fois 15 que le corps a de pieds de hauteur. Dans le cas dont il s'agit il faut deux fois 15 ou 30 cubes : ce bloc a donc 30 pieds cubes.

De cette observation on conclut que pour connaître la *solidité* ou la quantité de matière contenue dans un corps parallélipipède, il faut multiplier la longueur par la largeur, ce qui donne la base, et cette base par la hauteur.

Cette formule sert non-seulement à connaître la solidité des corps, mais aussi les capacités.

Soit un bassin de 10 mètres de longueur sur 3 de largeur et 2 de profondeur; on demande quelle est sa capacité?

Il est facile de concevoir que cette question est la même que si l'on demandait la solidité d'un corps qui aurait les dimensions de ce bassin. $10 \times 3 \times 2 = 60$, sa capacité est de 60 mètres cubes.

— Quelle est la capacité d'un bassin qui a $30^{m.},44$ de longueur sur $20^{m.},21$ de largeur et $3^{m.},4$ de profondeur?

Rép. $30,44 \times 20,21 = 615,1924, \times 3,4 = 2091,65416$ mètres cubes.

— Combien faut-il puiser de seaux pour vider un bassin qui a $10^{m.},4$ de longueur sur $3^{m.},54$ de largeur et $1^{m.},2$ de profondeur, supposant la capacité du seau d'un *décalitre?*

Solution. Multipliant la longueur par la largeur et la base par la hauteur, on trouve que la capacité de ce bassin est de $44^{mèt.},17^{c.}$ cubes. Puisqu'un litre est un décimètre cube, il est évident qu'il est la millième partie d'un mètre cube, car le cube d'un dixième est un millième (233). Or, pour évaluer un nombre de mètres cubes en litres, il faut donc le multiplier par 1000; ainsi $44^{m.},17 = 44170$ litres, capacité du bassin exprimée en litres. Mais, puisque le seau est un décalitre, il en faudra dix fois moins, c'est-à-dire seulement 4417 seaux.

Par le même moyen on peut connaître le poids d'un corps considérable lorsqu'on connaît sa solidité, et le poids d'un petit volume de même matière, par exemple un décimètre cube.

(243) — Quelle est la capacité d'un bassin circu-

laire de $50^{m.},45$ de circuit, $16^{m.},81$ de diamètre et $2^{m.},4$ de profondeur?

Solution. Pour connaître la surface de ce bassin il faut, d'après n° (230), multiplier la circonférence par le quart du diamètre. $50,43 \times 4^{m.},2025 = 212^{m.},01625$ ou $212^{m.},016$. La surface multipliée par la profondeur donnera la capacité $212,016 \times 2,4 = 508^{m.},8384$.

(244) — Quelle est la solidité d'un *cylindre* qui a 33 décimètres de circonférence et 9 décimètres de longueur?

Solution. Cette question est analogue à la précédente. On connaîtra la base de ce cylindre en multipliant sa circonférence par le quart de son diamètre, et cette base, multipliée par la longueur, donnera la solidité. On connaîtra le diamètre en prenant le tiers de la circonférence. Le tiers de 33 est 11; le quart de 11 décimètres est 275 centièmes de décimètres ou $2^{décim.},75$; $33 \times 2,75 = 90^{déc.},75$; $90,75 \times 9 = 816^{déc.},75$ cubes ou $0^{m.},81675$.

Remarquez que pour réduire le nombre de décimètres cubes en mètres, on le divise par 1000, parce qu'un mètre contient 1000 décimètres cubes.

(245) Pour connaître la solidité d'une *pyramide*, il faut multiplier la base par le tiers de la hauteur (*). (La démonstration de ces principes appartient à la géométrie.)

(*) La hauteur d'une pyramide ou d'un cône est la perpendiculaire abaissée du sommet sur la base.

— Quelle est la solidité de la plus haute pyramide d'Egypte, qui a 146 mètres de hauteur sur une base carrée de 232 mètres de longueur?

Rép. 2619075,84 mètres cubes.

(246) Pour connaître la solidité d'un *cône* (*), il faut de même multiplier la base par le tiers de la hauteur.

(247) Pour connaître la solidité d'une *boule* ou *sphère*, il faut multiplier sa plus grande circonférence, ou autrement la circonférence d'un de ces grands cercles par son diamètre.

— Quelle est la solidité de la terre exprimée en lieues cubiques? Elle a 9000 lieues de circonférence.

Son diamètre est de 3000 lieues. $9000 \times 3000 =$ 27000000; la terre a donc 27 millions de lieues cubiques.

Théorie.

(248) Le cube est un corps de la forme d'un dé à jouer, et qui par conséquent a la même dimension dans tous les sens.

On connaît la solidité d'un cube en multipliant une des surfaces par la hauteur. Pour connaître cette surface il faut former le carré de la longueur d'une des arêtes du cube. Cette longueur doit être par con-

---

(*) Un cône pourrait être appelé *pyramide à base circulaire ;* sa véritable définition ne pourrait pas être comprise des personnes qui ne connaissent pas la géométrie.

séquent multipliée deux fois par elle-même ou être trois fois facteur. Si un cube a 3 mètres de longueur, il aura $3 \times 3 \times 3$ ou 27 mètres cubes.

Tout nombre qui est le résultat de trois facteurs égaux s'appelle nombre cube.

Le nombre qui, multiplié deux fois par lui-même, produit un cube, est appelé *racine cubique;* c'est celui qui est censé exprimer la longueur de chaque arête du cube.

On forme le cube d'une fraction en cubant chacun de ses termes.

La formule par laquelle on extrait la racine cubique d'un nombre est fondée sur les observations suivantes :

1° Un nombre d'un seul chiffre en a 2 ou 3 à son cube.

2° Un nombre de deux chiffres en a 4 ou 6 à son cube.

3° Tout nombre de trois chiffres en a 7 ou 9 à son cube.

4° Tout nombre de quatre chiffres en a 10 ou 12 à son cube.

Il suit de là que les unités de la racine ne peuvent se trouver que dans les trois premiers chiffres à droite du cube.

Les dizaines ne peuvent se trouver que dans les trois suivants, etc.

Le cube est composé par la multiplication de la racine : 1° du cube des unités, 2° de 3 fois le carré des dizaines multiplié par les unités, 3° de 3 fois les dizaines multipliées par le carré des unités, 4° du cube des dizaines.

De ces différentes observations on déduit la formule au moyen de laquelle on trouve la racine. Cette formule consiste à retrancher du cube total toutes les parties dont il est composé.

Pour l'explication de la formule nous renvoyons aux développements, attendu qu'il serait impossible d'en donner dans cette théorie les détails suffisants. Nous rappellerons seulement l'observation suivante :

Lorsque la racine a plus de deux chiffres, on la considère toujours comme composée de dizaines et d'unités, tous les chiffres trouvés exprimant des dizaines et le chiffre cherché exprimant des unités. Si le nombre dont on extrait la racine est un cube parfait, il ne doit rien rester quand on a retranché toutes les parties du cube total. S'il y a un reste, la racine s'évalue approximativement au moyen de décimales. On ajoute alors à droite du cube autant de fois trois zéros qu'on veut avoir de chiffres décimaux à la racine; l'opération se fait ensuite comme à l'ordinaire.

Pour extraire la racine cubique d'un nombre qui a des chiffres décimaux, on forme, en ajoutant des zéros, autant de tranches de 3 chiffres qu'on veut avoir de décimales à la racine, et l'opération ne diffère en rien de la précédente.

Pour extraire la racine cubique d'une fraction, il faut extraire celle de chacun de ces termes. Cette opération présente 3 cas.

1° Si les deux termes sont des nombres cubiques.

2° Si le numérateur seul n'est pas un nombre cubique; on en extrait la racine approximative, et l'on fait disparaître le dénominateur en divisant le numérateur par ce dénominateur.

3° Si aucun des termes n'est un cube parfait, on les multiplie tous deux par le carré du dénominateur, ce qui rend ce dernier terme un cube parfait. L'opération est ensuite semblable à la précédente.

Le parallélipipède est un corps de forme cubique, mais plus alongé dans un sens que dans un autre. On connaît sa solidité en multipliant la longueur par la largeur, ce qui donne la base, et cette base par la hauteur.

Pour connaître la capacité d'un bassin circulaire, il faut mesurer la surface d'après (n° 230), et multiplier cette surface par la profondeur.

La solidité d'un cylindre se mesure en multipliant la base par la longueur.

La solidité d'un cône ou d'une pyramide se mesure en multipliant la base par le tiers de la hauteur.

On connaît la solidité d'une sphère en multipliant sa circonférence par son diamètre.

Questions théoriques.

1° Qu'est-ce qu'un cube (212)?

2° Qu'appelle-t-on solidité d'un corps (242)?

3° Comment connaît-on la solidité d'un cube (212)?

4° Qu'est-ce qu'un nombre cube (212)?

5° Qu'est-ce que la racine cubique (212)?

6° Comment forme-t-on le cube d'une fraction? Expliquez-en la raison sur la fraction $\frac{5}{7}$ (233).

7° Combien un nombre d'un seul chiffre en a-t-il à son cube? Même question sur les nombres de 2, 3, 4 chiffres (234).

8° Dans quelle partie du nombre cube se trouvent les unités, les dizaines, etc. de la racine (234)?

9° Comment le cube est-il composé par la multiplication des facteurs (234)?

10° Pourquoi partage-t-on le nombre dont on veut extraire la racine par tranches de trois chiffres (234)?

Il est plusieurs questions sur la formule qu'il serait trop long de donner ici, attendu qu'il faut les proposer sur une opération même.

11° Comment reconnaît-on que l'opération est exacte, lorsqu'on extrait la racine d'un cube parfait?

12° Comment extrait-on la racine d'un nombre incommensurable (239)?

13° Pourquoi ajoute-t-on au nombre incommensurable autant de fois 3 zéros qu'on veut avoir de décimales à la racine (239)?

14° Comment extrait-on la racine cubique d'un nombre qui a des décimales?

15° Comment extrait-on la racine cubique d'une fraction, et quels sont les différents cas que présente cette opération (241)?

16° Comment connaît-on la solidité d'un parallélipipède? Même question sur un cylindre, un cône, une pyramide et une sphère. Comment connaît-on la capacité d'un bassin circulaire (242 et suiv.)?

§ XVI.

PROGRESSIONS.

(249) Lorsque l'on dit que 2 est à 5 comme 5 est à 8, comme 8 est à 11, comme 11 est à 13, etc., on forme une suite de rapports égaux dont la raison arithmétique est 3, ou une proportion continue dont le nombre des termes peut aller à l'infini. Cette suite de rapports égaux s'appelle *progression*. Une progression est dite arithmétique ou géométrique suivant que les termes sont arithmétiques ou géométriques. Elle est dite aussi *croissante* ou *décroissante*, selon que les termes vont en augmentant ou en diminuant. Une progression décroissante prise à rebours devient une progression croissante. La progression précédente devrait s'écrire ainsi : 2 . 5 : 5 . 8 : 8 . 11 : 11 . 13, etc., mais par abréviation on écrit ÷ 2 . 5 . 8 . 11 . 13, etc., ce qui signifie toujours 2 est à 5 comme 5 est à 8, comme 8 est à 11, comme 11 est à 13. Mais on évite, ainsi que dans la proportion continue, de répéter les termes moyens. D'après cela on voit que chacun des termes moyens est à la fois conséquent du terme précédent et antécédent du terme suivant.

(250) Si l'on a cette progression géométrique : 2 est à 4 comme 4 est à 8, comme 8 est à 16, comme 16 est à 32, comme 32 est à 64, on devrait l'écrire ainsi : 2 : 4 : : 4 : 8 : : 8 : 16 : : 16 : 32 : : 32 : 64; mais par abréviation on écrit : ∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64.

Dans cette progression chaque terme moyen est aussi conséquent et antécédent.

(251) En examinant la série des membres d'une progression arithmétique, on verra que chaque terme se compose du terme précédent plus la raison. En effet, dans la progression précédente on voit que 5 se compose du premier terme 2 et de la raison 3; 8 se compose du second terme 5 et de la raison 3, etc.

La série naturelle des nombres 1, 2, 3, 4, 5, etc., forme une progression arithmétique dont le premier terme est 1 et la raison 1.

La série des nombres décuples 10, 20, 30, 40, 50, etc., forme une progression arithmétique dont la raison est 10.

La série des nombres pairs 2, 4, 6, 8, 10, etc., ainsi que celle des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, etc., forment encore deux progressions dont la raison est 2.

D'après le système de numération, les différentes valeurs qu'un chiffre acquiert suivant la colonne dans laquelle il est placé forment une progression géométrique dont la raison est 10; croissante en allant de droite à gauche, et décroissante dans le sens contraire.

(252) De ce que nous avons dit sur la formation des membres d'une progression arithmétique, on peut déduire la réponse à cette question :

N'y a-t-il pas un moyen de calculer le dernier terme d'une progression sans employer les termes moyens? par exemple, on veut connaître de suite le huitième terme d'une progression dont le premier est 2 et la raison 4.

D'après la manière connue on aura :

Pour le 1er 2
Pour le 2e $2+4$ ou 6
Pour le 3e $2+4+4$ ou 10
Pour le 4e $2+4+4+4$ ou 14
Pour le 5e $2+4+4+4+4$ ou 18
Pour le 6e $2+4+4+4+4+4$ ou 22
Pour le 7e $2+4+4+4+4+4+4$ ou 26
Pour le 8e $2+4+4+4+4+4+4+4$ ou 30.

On voit donc que ce huitième terme se compose du premier plus la raison répétée 7 fois, ou autant de fois qu'il y a de termes après le premier.

Si l'on avait à calculer le vingtième terme de cette même progression, on répéterait la raison 4 dix-neuf fois, parce qu'il y a dix-neuf termes après le premier, et l'on ajouterait ce produit au premier terme. $4 \times 19 = 76$, $+ 2 = 78$. Le dernier terme est donc 78.

(253) — On désire savoir quel est le centième nombre pair?

Solution. Ce centième terme se compose donc du premier plus 99 fois la raison. $99 \times 2 = 198$, $+ 2 = 200$.

— On désire savoir quel est le cinquantième terme de la série des nombres quintuples, c'est-à-dire de la progression formée par les nombres 5, 10, 15, 20, 25, 30, etc.?

Solution. Ces nombres forment une progression dont le premier terme est 5 et la raison 5. $49 \times 5 = 245$, $+ 5 = 250$.

(254) — On veut insérer entre 5 et 53 cinq moyens arithmétiques, c'est-à-dire cinq nombres moyens qui forment avec 5 et 53 une progression arithmétique?

Solution. Puisqu'entre 5 et 53 il doit y avoir cinq nombres, 53 est le septième terme de la progression. Si l'on connaissait la *raison*, il serait facile de former les termes moyens; mais on peut trouver cette *raison* en observant que 53 est composé du premier terme plus la raison répétée six fois. Or si l'on retranche le premier terme de 53, il restera 48, qui est composé de la raison multipliée par 6. On trouvera donc la raison en divisant 48 par 6, ce qui donne 8.

La progression sera donc formée de cette manière:

5
$5+8$ ou 13
$5+8+8$ ou 21
$5+8+8+8$ ou 29
$5+8+8+8+8$ ou 37
$5+8+8+8+8+8$ ou 45
$5+8+8+8+8+8+8$ ou 53.

Ou bien $\div 5 . 13 . 21 . 29 . 37 . 45 . 53$.

(255) Dans la progression précédente la somme des deux extrêmes est $5 + 53 = 58$. La somme du second et du sixième est $13 + 45 = 58$. La somme du troisième et du cinquième est $21 + 37 = 58$. 29 qui reste seul est la moitié de 58.

De cette observation qui peut être répétée sur un plus grand nombre de progressions, on conclut 1° que dans une progression arithmétique la somme des deux extrêmes est toujours égale à la somme de deux moyens pris à égale distance des extrêmes ; 2° si le nombre des termes est impair, le terme du milieu est a moitié de la somme des extrêmes.

Démonstration du premier principe. Les deux premiers et les deux derniers termes peuvent former une proportion exacte, $5 . 13 : 45 . 53$, dans laquelle il est évident que la somme des moyens est égale à la somme des extrêmes.

En prenant le premier et le dernier terme comme extrêmes, et le troisième et le cinquième comme moyens, on aura la proportion $5 . 21 : 37 . 53$, dans laquelle il est évident que les rapports sont égaux, et que la somme des moyens est de même égale à la somme des extrêmes.

Donc, dans toute progression arithmétique, les deux extrêmes et deux moyens quelconques, pris à égale distance des extrêmes, pouvant former une proportion, les deux sommes doivent être égales.

Démonstration du second principe. Les deux extrêmes et le terme moyen forment ensemble une proportion continue : ⁚ 5 . 29 . 53. Nous avons vu que dans toute proportion continue arithmétique le terme moyen est la moitié de la somme des deux extrêmes (183).

(256) — Soit à former une progression *géométrique* de 5 termes dont le premier est 2 et la raison 3.

On comprend facilement que pour avoir le second terme il faut multiplier le premier par la raison ; pour avoir le troisième il faut multiplier le second par la raison, etc. Pour la progression précédente on aura donc :

1er terme 2
2^{e} terme $2 \times 3 = 6$
3^{e} terme $2 \times 3 \times 3 = 18$
4^{e} terme $2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$
5^{e} terme $2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 162$.

Ou $\div\!\!\div$ 2 : 6 : 18 : 54 : 162.

D'après ce tableau il est évident que le troisième terme est composé du premier multiplié deux fois par la raison ; le quatrième est composé du premier multiplié trois fois par la raison, etc., ou, ce qui est la même chose, chaque terme est composé du premier multiplié par la raison autant de fois qu'il y a de termes après le premier ; ou encore : chaque terme est composé du premier multiplié par la raison élevée à la puissance marquée par le nombre des termes qui suivent celui-ci ; car dans la question précédente le cinquième terme 162 est composé du premier 2 multiplié par la raison 3 élevée à sa quatrième puissance. La quatrième puissance de 3 est $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$. $2 \times 81 = 162$.

(257) De cette observation on conclut qu'on peut trouver un terme quelconque d'une progression géométrique sans calculer ceux qui le précèdent, lorsqu'on connaît le premier terme et la raison.

— Quel est le septième terme d'une progression géométrique dont le premier est 4 et la raison 2?

Solution. Le septième terme est composé du premier multiplié par la raison élevée à sa sixième puissance. $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$. $4 \times 64 = 256$.

— Calculer le vingtième terme d'une progression géométrique dont le premier terme est 1 et la raison 2? *R.* 524288.

— Quel est le douzième terme d'une progression géométrique dont le premier terme est 4 et la raison 3? *R.* 708568.

— Quel est le centième terme d'une progression géométrique dont le premier terme est 1 et la raison 2?

R. 1254849781650614758275505717247.

— Une personne mettant à la loterie avait fait ce raisonnement : en suivant un numéro, c'est-à-dire en mettant à tous les tirages sur le même, il finira par sortir, et en doublant la mise à chaque tirage, il rapportera beaucoup lorsqu'il sortira.

Cette personne met 1 centime au premier tirage, 2 centimes au second, 4 au troisième et ainsi de suite, en doublant jusqu'au quinzième tirage, ses fonds étant alors épuisés. Le numéro n'est sorti qu'au trentième tirage; on demande quelle somme cette personne a perdue, et quelle est celle qu'il aurait fallu pour suivre ce numéro jusqu'à sa sortie?

Solution. Cette question est une progression géométrique dont le premier terme est 1 et la raison 2. Il faut en outre chercher la somme des quinze premiers et celle des trente termes (258). La somme perdue est de 10484 fr. 23 cent., et il aurait fallu 10737599 fr. 99 cent. pour suivre jusqu'à la sortie.

On voit par là quel est le prodigieux effet des progressions, effet qui serait bien plus étonnant encore si au lieu de la raison 2 on en avait une plus forte.

(258) L'observation a conduit au principe suivant pour trouver la somme des termes d'une progression géométrique sans les additionner. Multipliez le dernier terme par la raison, du produit retranchez le premier terme, et divisez le reste par la raison diminuée de l'unité.

(259) — Insérer entre 7 et 189 deux moyens géométriques, c'est-à-dire deux nombres qui forment avec 7 et 189 une progression géométrique?

Solution. Si l'on connaissait la *raison*, il serait facile de trouver les nombres cherchés; c'est cette raison qu'il importe d'abord de déterminer. La progression devant avoir quatre termes, 189 est composé de la troisième puissance de la raison multipliée par le premier terme. Donc si l'on divise 189 par 7, on trouve 27 pour la troisième puissance de la raison, et 3 pour la raison elle-même, en extrayant la racine cubique de 27. Le second terme sera 3×7 ou 21, et le troisième 3×21 ou 63. $\div\!\div$ 7 : 21 : 63 : 189.

(260) — Insérer un moyen géométrique entre 8 et 128?

La progression devant avoir trois termes est une proportion continue qui s'écrit ainsi par abréviation : $\div$ 8 : x : 128 ou 8 : x :: x : 128. On sait que dans toute proportion géométrique le produit des extrêmes est égal au produit de deux moyens. Ainsi $x \times x = 128 \times 8 = 1024$. D'après cela il est aisé de comprendre que la valeur de x est la racine carrée de 1024.

Donc pour trouver un moyen géométrique entre deux nombres il faut extraire la racine carrée du produit de ces deux nombres.

Si l'on avait à insérer un plus grand nombre de moyens, il faudrait extraire la racine d'une puissance supérieure à celle du cube, c'est ce dont nous nous occuperons dans les logarithmes.

Les progressions ont encore quelques propriétés que nous allons examiner.

1° Soit la progression

$$\div\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256.$$

Remarquez qu'on recevra le même produit en multipliant les deux extrêmes 2 et 256 et les deux moyens 4 et 128. On recevra encore le même produit en multipliant les moyens 8 et 64, 16 et 32. Remarquez encore que les moyens que l'on multiplie sont toujours pris à égale distance des extrêmes. Cette observation est fondée sur ce que les deux extrêmes 2 et 256, et les deux moyens 4 et 128 forment une proportion 2 : 4 : : 128 : 256 dont la raison est 2, et dans laquelle il est évident que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Les deux extrêmes et les deux moyens 8 et 64 forment encore une proportion 2 : 8 : : 64 : 256, dont la raison est 2×2 ou 4. Il en est de même des autres termes.

Cette observation a conduit à ce principe que, *dans toute progression géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des deux moyens, pris à égale distance des extrêmes.*

2° $\div\div$ 3 : 9 : 27 : 81 : 243.

Dans cette progression le nombre des termes est impair, les deux extrêmes et le moyen qui est au centre de la progression forment une proportion continue $\div\div$ 3 : 27 : 243, dans laquelle le terme moyen est la racine carrée du produit des extrêmes, suivant le principe établi n° (260). Donc, *lorsque dans une progression géométrique le nombre des termes est impair, le terme du centre est la racine carrée du produit des extrêmes.*

Les progressions reçoivent peu d'applications dans l'arithmétique proprement dite; mais il est important de les comprendre parfaitement pour entendre les logarithmes que nous allons développer, et qui termineront ce Cours.

§ XVII.

LOGARITHMES.

(261)

$$\div\!\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024$$

$$\div\, 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10$$

L'une de ces deux progressions est géométrique, et l'autre arithmétique; celle-ci est la suite naturelle des nombres qui, comme on le sait, forment une progression arithmétique, dont la raison est 1. Ces deux progressions sont placées l'une sous l'autre et correspondent terme à terme. Chacun des termes de la progression arithmétique est appelé le logarithme du nombre correspondant dans la progression supérieure. Nous allons faire sur la correspondance de ces deux progressions plusieurs observations qu'il importe de bien comprendre.

(262) Si l'on ajoute deux termes quelconques de la progression arithmétique, par exemple 3 et 5, on trouve 8 pour somme. Si l'on multiplie en même temps les deux termes de la progression géométrique 8 et 32 qui correspondent aux deux termes inférieurs 3 et 5, on trouve pour produit 256 qui correspond à 8, somme des deux termes inférieurs.

Cette observation que l'on peut répéter sur d'autres nombres est fondée sur ce principe, que dans la progression géométrique la raison est multipliée par elle-même autant de fois que celle de la progression arithmétique est répétée, et que par conséquent le produit des uns et la somme des autres doivent se trouver également éloignés du nombre sur lequel on a opéré.

Il suit de cette observation qu'on peut trouver le produit de deux termes de la progression géométrique sans les multiplier, mais seulement en additionnant leurs logarithmes et en voyant à quel nombre correspond la somme de ces deux logarithmes.

(263) Si l'on divise un terme de la progression géométrique par un autre terme de la même progression, par exemple 512 par 16, on trouve 32 pour quotient. Si l'on soustrait 4, logarithme de 16, de 9, logarithme de 512, il reste 5 qui correspond à 32, quotient de 512 divisé par 16. Cette observation est l'inverse de la précédente, et l'on en conclut que sans faire de division on peut connaître le quotient de deux termes de la progression géométrique en soustrayant leurs logarithmes et en voyant à quel nombre correspond leur différence.

(264) Si l'on double un terme de la progression arithmétique, par exemple 3, on reçoit 6 qui est le logarithme de 64; 64 est le carré de 8, qui correspond au terme que l'on a doublé.

Si l'on triple un terme de la progression arithmétique, 3 par exemple, on reçoit 9 qui correspond à 512 cube de 8. Si l'on avait multiplié 3 par 4, 5, 6, 7, etc., on aurait eu le logarithme de la quatrième, cinquième, sixième, septième, etc. puissance du nombre correspondant à 3.

On conclut de là qu'on peut trouver de suite une puissance quelconque d'un nombre, en multipliant le logarithme de ce nombre par le nombre indicateur de la puissance. Cet indicateur se nomme *exposant*.

Cette observation conduit aussi à trouver une racine quelconque par des procédés extrêmement simples, comme nous le verrons dans un instant.

Cet aperçu a suffi pour donner une idée de l'avantage que présentent les logarithmes pour abréger le calcul, puisqu'on substitue l'addition à la multiplication et la soustraction à la division. C'est pourquoi on a calculé les tables de logarithmes dont nous allons donner quelque explication.

(265) On a choisi pour progression géométrique la progression décuple, plus avantageuse sous tous les rapports, et pour progression arithmétique la suite naturelle des nombres; on a donc :

$$\div\!\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000$$

$$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6$$

Mais pour que ces tables soient de quelque utilité, il est nécessaire d'avoir les logarithmes de tous les nombres intermédiaires. Puisque le logarithme de 10 est 1 et que celui de 100 est 2, ceux de tous les nombres intermédiaires entre 10 et 100 ne peuvent être que 1 plus une fraction; ceux de tous les nombres entre 100 et 1000 seront 2 plus une fraction; entre 0 et 1 ils ne peuvent être qu'une fraction. Ces fractions ont été évaluées en décimales. C'est sur ce principe qu'on a calculé les tables; celle que nous donnons ici ne va que jusqu'à 125, attendu qu'il en existe de complètes jusqu'à 10000. La suite des nombres 1, 2, 3, 4, 5, etc., forme donc la progression géométrique et les colonnes des logarithmes forment la progression arithmétique. Il est nécessaire d'être muni de ces tables.

Table des logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 125.

Nomb.	Logarithm.	Nomb.	Logarithm.	Nomb.	Logarithm.
0	Inf. nég.	29	1,462398	58	1,763428
1	0,000000	30	1,477121	59	1,770852
2	0,301030	31	1,491362	60	1,778151
3	0,477121	32	1,505150	61	1,785330
4	0,602060	33	1,518514	62	1,792392
5	0,698970	34	1,531479	63	1,799341
6	0,778151	35	1,544068	64	1,806180
7	0,845098	36	1,556303	65	1,812913
8	0,903090	37	1,568202	66	1,819544
9	0,954243	38	1,579784	67	1,826075
10	1,000000	39	1,591065	68	1,832509
11	1,041393	40	1,602060	69	1,838849
12	1,079181	41	1,612784	70	1,845098
13	1,113943	42	1,623249	71	1,851258
14	1,146128	43	1,633468	72	1,857332
15	1,176091	44	1,643453	73	1,863323
16	1,204120	45	1,653213	74	1,869232
17	1,230449	46	1,662758	75	1,875061
18	1,255273	47	1,672098	76	1,880814
19	1,278754	48	1,681241	77	1,886491
20	1,301030	49	1,690196	78	1,892095
21	1,322219	50	1,698970	79	1,897627
22	1,342423	51	1,707570	80	1,903090
23	1,361728	52	1,716003	81	1,908485
24	1,380211	53	1,724276	82	1,913814
25	1,397940	54	1,732394	83	1,919078
26	1,414973	55	1,740363	84	1,924279
27	1,431364	56	1,748188	85	1,929419
28	1,447158	57	1,755875	86	1,934498

Nomb.	Logarithm.	Nomb.	Logarithm.	Nomb.	Logarithm.
87	1,939519	100	2,000000	113	2,053078
88	1,944483	101	2,004321	114	2,056905
89	1,949390	102	2,008600	115	2,060698
90	1,954243	103	2,012837	116	2,064458
91	1,959041	104	2,017033	117	2,068186
92	1,963788	105	2,021189	118	2,071882
93	1,968483	106	2,025306	119	2,075547
94	1,973128	107	2,029384	120	2,079181
95	1,977724	108	2,033424	121	2,082785
96	1,982271	109	2,037426	122	2,086360
97	1,986772	110	2,041393	123	2,089905
98	1,991226	111	2,045323	124	2,093422
99	1,995635	112	2,049218	125	2,096910

(266) Pour calculer les logarithmes des nombres intermédiaires entre 1 et 10, il a fallu insérer entre ces nombres 8 moyens géométriques et de même 8 moyens arithmétiques entre 0 et 1 ; mais en insérant 8 moyens géométriques entre 1 et 10, ces moyens ne sont point les nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; voici comment on s'y est pris pour avoir les logarithmes de ces nombres. Soit à chercher le logarithme de 4 : si au lieu de 8 moyens géométriques on en insérait un beaucoup plus grand nombre, par exemple 10000000, il est possible qu'un de ces termes soit précisément 4 ou en soit si près qu'on puisse sans erreur le lui substituer. En effet, plus on en insérera, plus ils se rapprocheront des nombres naturels 2, 3, 4, etc., dont on veut avoir les logarithmes. On insérera ensuite 10000000 moyens arithmétiques entre 0 et 1; puis cherchant le moyen géométrique qui se rapproche le plus de 4 et auquel on substituera

4, on lui donnera pour logarithme le nombre correspondant dans la série inférieure. En substituant ainsi chaque nombre de la série naturelle 2, 3, 4, 5, etc., au moyen géométrique qui en approche le plus, on aura les logarithmes de cette même série. On fait la même opération pour les nombres de 10 à 100, de 100 à 1000, etc.; mais on a pour cette recherche des moyens abrégés que nous ne pouvons développer dans cet ouvrage; il suffit pour le moment de connaître à peu près comment on a pu s'y prendre.

(267) Remarquez que le premier chiffre à gauche des logarithmes et qui exprime des entiers, augmente d'une unité par degré des puissances de 10, ce qui tient à la formation même de la progression; ce chiffre s'appelle *caractéristique.* D'après cette observation, on voit qu'il est facile de connaître approximativement un nombre de la série supérieure par la caractéristique, et de même on peut connaître la caractéristique par le nombre supérieur; c'est pourquoi dans plusieurs tables on omet cette caractéristique. Soit, par exemple, le nombre 611, la caractéristique de son logarithme doit être 2, parce qu'il appartient aux centaines, ou si l'on avait le logarithme 3,69513, on voit au premier coup d'œil que le nombre correspondant doit être des mille, parce que la caractéristique 3 appartient à la troisième puissance de 10 ou aux mille.

(268) Remarquez encore que la caractéristique a toujours autant d'unités que le premier nombre de la

série a de zéros : ainsi celle de 10 est 1, celle de 100 est 2, celle de 1000 est 3, etc.

Logarithmes des nombres excédant les limites des tables.

(269) Nous avons vu, n° (267), que la caractéristique augmente d'une unité par degrés des diverses puissances de 10, puisque les nombres 100, 1000, 10000, etc., ne sont que des puissances de la racine 10, dont la caractéristique indique le degré, ou autrement dit, dont elle est l'exposant. Or en ajoutant une unité à la caractéristique, on augmente la puissance de 10 d'un degré; on multiplie donc ce nombre par 10, ou, en d'autres termes, le logarithme augmenté ou diminué d'une unité, devient logarithme d'un nombre 10 fois plus grand ou 10 fois plus petit. Si l'on ajoute ou si l'on retranche 2 ou 3 unités, le logarithme a pour correspondant un nombre 100 ou 1000 fois plus grand ou plus petit.

(270) D'après cette observation soit à chercher le logarithme de 367800.

Solution. Ce nombre étant hors des limites des tables, on retranche de la droite autant de zéros que cela est nécessaire pour que le reste du nombre se trouve dans la table. Ce reste est 3678, dont le logarithme est 3,56561; mais le nombre a été rendu 100 fois plus petit par la suppression des 2 zéros; or pour avoir le logarithme d'un nombre 100 fois plus grand, il faut, d'après ce que nous venons de dire, ajouter

2 unités à la caractéristique et l'on aura 5,56561 pour logarithme de 367800.

(271) Soit à chercher le logarithme de 457871.

Solution. Ce nombre n'étant pas terminé par des zéros, on retranche de même autant de chiffres significatifs que cela est nécessaire; mais ces chiffres retranchés forment une fraction décimale, de sorte qu'on aura pour le nombre précédent 4578,71; le logarithme de 4578 est 3,66068 : au lieu de 4578,71, prenons 4579, dont le logarithme est 3,66077. La différence de ce logarithme à celui de 4578 est de 9; or, puisqu'une unité de différence entre les nombres 4578 et 4579 donne 9 de différence entre leurs logarithmes, de combien sera la différence de ces mêmes logarithmes, si celle des deux nombres n'est que 0,71? Ce résultat s'obtient par la proportion suivante :

$$1 : 9 :: 0,71 : x = 6,39 \text{ ou simplement } 6.$$

On ajoutera donc 6 à 3,66068, logarithme de 4578, ce qui donne 3,66074 pour logarithme de 4578,71; mais ce nombre étant 100 fois trop petit, on ajoutera 2 unités à la caractéristique, ce qui donne 5,66074 pour logarithme d'un nombre 100 fois aussi fort ou de 457871.

(272) On voit par-là quel est le moyen de trouver le logarithme d'un nombre accompagné de décimales.

Supposons que l'on ait à chercher le logarithme de 35,27, on fait abstraction de la virgule et l'on cherche celui de 3527 qui est 3,54741; mais la suppression de la virgule a rendu le nombre 100 fois trop fort, il faut donc rendre le logarithme 100 fois plus faible en retranchant 2 unités de la caractéristique, ce qui donne 1,54741 pour logarithme de 35,27. Si le nombre dépassait les limites des tables, on se conduirait comme dans le cas du nº (271).

Logarithmes dont les nombres correspondants ne se trouvent point dans les tables.

(273) Soit à chercher le nombre correspondant du logarithme 8,32118.

Solution. Ce logarithme étant hors des limites des tables, on retranchera de la caractéristique autant d'unités que cela est nécessaire pour qu'il puisse s'y trouver. Dans le nombre ci-dessus, on en retranche 5 et il reste 3,32118 qui correspond à 2095; mais il faut ajouter à ce nombre 5 zéros, parce que 3,32118 est logarithme d'un nombre 100000 fois trop petit. On aura donc 209500000 pour nombre correspondant de 8,32118.

(274) A quel nombre correspond le logarithme 3,56712?

Solution. Ce logarithme ne se trouve point dans les tables, quoiqu'il n'en dépasse pas les limites; mais il tombe entre ceux des nombres 3690 et 3691, il répond donc à 3690 plus une fraction. Le logarithme de 3690 est 3,56703 et celui de 3691 est 3,56714. La différence entre ces deux logarithmes est 11; la différence entre celui de 3690 et 3,56712 est 9. On peut donc proposer cette question :

Si 11 de différence entre les logarithmes répond à 1 unité de différence entre les nombres 3690 et 3691, à quelle différence de nombre répond 9 de différence entre 3,56703 logarithme de 3690, et 3,56712 logarithme proposé?

$$11 : 1 :: 9 : x = \frac{9}{11}.$$

Le nombre cherché est donc 3690 $\frac{9}{11}$ ou 3690,818.

Ce cas se rencontre fréquemment dans la division par logarithme. Lorsqu'après avoir soustrait le logarithme du diviseur du logarithme du dividende, on reçoit celui du quotient, ce dernier logarithme ne se trouve dans les tables qu'autant que le quotient est un nombre entier, ce qui arrive rarement; alors ou ce logarithme dépasse les limites des tables, ou il tombe entre deux autres, ce sont les deux cas que nous venons de développer.

Cette méthode n'est pas extrêmement rigoureuse, surtout pour les nombres faibles, attendu que la différence des logarithmes n'est pas parfaitement proportionnelle à la différence des nombres, mais elle suffit pour les opérations ordinaires.

(275) — A quel nombre répond le logarithme 0,36791?

Solution. D'après ce que nous venons de dire, l'exactitude est d'autant moins rigoureuse que le nombre est plus faible; or le nombre correspondant au logarithme ci-dessus est entre 2 et 3, il est donc 2 plus une fraction, que l'on pourrait déterminer par le moyen indiqué plus haut; mais le nombre étant trèsfaible, on le détermine par le moyen suivant, que l'on emploie ordinairement quand le nombre cherché est au dessous de 1500.

On cherche le logarithme donné avec 3 unités de plus à la caractéristique, ce qui donne un nombre correspondant 1000 fois trop fort, que l'on divisera ensuite par 1000. 3,36791 répond à 2333, divisant ce nombre par 1000, on trouve pour le nombre cherché 2,333.

Application des logarithmes. Multiplication.

(276) — On demande le produit de 372 par 423?

Solution. Le logarithme de 372 est 2,57054. Celui de 423 est 2,62634 : la somme de ces deux logarithmes est 5,19688. De ce logarithme on retranche 2 unités, afin qu'il rentre dans les limites des tables, il reste 3,19688 que l'on ne trouve pas, mais qui tombe entre le logarithme de 1573 et celui de 1574. Donc le correspondant de 3,19688 est 1573 et une fraction (*). Le logarithme de 1573 est 3,19673 et celui de 1574 est de 3,19700. La différence entre ces deux logarithmes est de 27. La différence entre 3,19673 logarithme de 1573, et 3,19688 logarithme proposé, est de 15. Donc si 27 de différence entre les logarithmes donnent une unité de différence entre les

(*) Si l'on voulait se contenter d'un produit approximatif, on ajouterait deux zéros à 1573, suivant (n° 273), et l'on aurait 157000 pour produit approché de 372 et de 423.

nombres, 15 de différence entre le logarithme de 1573 et le logarithme proposé donneront quelle différence de nombres?

$$27 : 1 :: 15 : x = \tfrac{15}{27}.$$

Le nombre correspondant de 3,19688 est donc 1573 $\frac{15}{27}$ ou $\frac{5}{9}$; mais ce nombre est 100 fois trop petit, puisqu'on a retranché 2 unités de la caractéristique, il faut le multiplier par 100, ce qui donne 157300 $\frac{1500}{27}$ ou 157356 pour produit de 372 par 423.

Division.

(277) — Quel est le quotient de 37812 divisé par 454?

Solution. D'après n° (270), on trouve pour logarithme de 37812 4,57763; celui de 454 est 2,65706. La différence entre ces deux logarithmes est 1,92057, qui tombe entre les logarithmes de 83 et 84. Le quotient est donc 83 et une fraction que l'on détermine par le moyen indiqué n° (274), on trouve 83, $\frac{149}{250}$ ou 83,286.

Règle de trois.

(278) La règle de trois ne consistant qu'en une multiplication et une division, doit se résoudre par logarithmes, par l'addition des logarithmes des deux termes moyens et la soustraction du logarithme de l'extrême connu.

Soit à chercher le quatrième terme de cette proportion :

$$86 : 9650 :: 253 : x.$$

Le logarithme de 9650 est 3,98453; celui de 253 est 2,40312: leur somme est 6,38765. De cette somme il faut retrancher le logarithme de 386 qui est 2,58659, le reste 3,80106 répond au nombre 6325 qui est le quatrième terme de la proportion.

Fractions. Nombres fractionnaires et nombres négatifs.

(279) On ne trouve pas dans les tables les logarithmes des fractions ni ceux des nombres fractionnaires: voici comment on les détermine.

Soit à chercher le logarithme de $6\frac{2}{7}$.

On réduit le tout en fractions, ce qui donne $\frac{44}{7}$; mais $\frac{44}{7}$ ne sont autre chose que 44 divisés par 7; par cette même raison on trouvera le logarithme de $\frac{44}{7}$, en retranchant le logarithme du dénominateur du logarithme du numérateur. Le logarithme de 44 est 1,64345, — 0,84510 logarithme de 7 = 0,79835, logarithme de $6\frac{2}{7}$.

(280) — Quel est le logarithme de $\frac{4}{9}$?

Solution. Cette opération devrait se faire comme la précédente; mais 0,95424 logarithme de 9, ne peut pas être soustrait de 0,60206 logarithme de 4; on cherche la différence de ces deux logarithmes en soustrayant celui du numérateur de celui du dénominateur. Le reste 0,35218 marque ce dont il s'en faut pour que la soustraction ait pu se faire et s'écrit ainsi: — 0,35218. Le logarithme de $\frac{4}{9}$ est donc *moins* 0,35218. Ces nombres, précédés du signe *moins* dans le cas dont il s'agit, s'appellent *négatifs*. Ils ont des propriétés particulières dont les développements appartiennent à l'algèbre. Il est cependant nécessaire d'avoir une idée de leurs fonctions pour comprendre la multiplication des fractions par logarithmes.

Supposons qu'un homme n'ait pas un sou de fortune, mais qu'il ne doive rien, sa fortune est o. Supposons qu'un autre homme n'ait également rien, mais qu'il doive 100 fr., sa fortune est encore moindre que celle de l'autre, elle sera — 100 fr. Cela ne veut point dire qu'elle est au dessous de o, puisque o est l'absence de toute quantité, mais cela veut dire que ce nombre est en quelque sorte mis en réserve pour être soustrait aussitôt que l'occasion s'en présentera. Supposons maintenant que ces deux hommes gagnent chacun 200 fr. : le premier aura pour fortune $200 + 0$ et le second $200 - 100 = 100$ fr.

Or dans le cas de la fraction $\frac{4}{9}$, remarquez que le logarithme négatif $-0,35218$ exprime l'excédant du logarithme du dénominateur sur celui du numérateur; qu'il exprime en un mot une quantité qui devrait être soustraite, mais qui ne peut pas l'être.

(281) Soit à multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{6}$. Le logarithme de $\frac{3}{4} = -0,124939$, et celui de $\frac{5}{6} = -0,079181$.

Solution. Multiplier une fraction par une autre, c'est la multiplier par le numérateur et diviser le produit par le dénominateur; ou en opérant par logarithmes, il faut ajouter le logarithme du numérateur et soustraire celui du dénominateur, ou simplement retrancher le surplus de ce dernier, qui est le logarithme négatif de la fraction. Donc pour faire une multiplication de fractions par logarithmes, il faut soustraire le logarithme de la fraction multiplicateur du logarithme de la fraction multiplicande ; le reste est le logarithme du produit.

(282) Soit à diviser $\frac{1}{3}$ par $\frac{2}{7}$.

Solution. Nous avons vu n° (85) que diviser par $\frac{2}{7}$ revenait à multiplier par $\frac{7}{2}$. Or le logarithme de $\frac{7}{2}$ n'est plus un nombre négatif ; au lieu de le retrancher il faut l'ajouter au logarithme du dividende, ce qui donne le logarithme du quotient.

Le logarithme de $\frac{1}{3} = -0{,}477121$, et celui de $\frac{7}{2} = +0{,}544068$. Or $-0{,}477121 + 0{,}544068 = +0{,}066947$. Ce résultat est analogue à celui de $-100 + 200 = +100$. Devant ajouter plus qu'il ne faut retrancher, il doit rester quelque chose en plus ; c'est pourquoi le logarithme ci-dessus n'est point un nombre négatif.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur les propriétés des nombres négatifs, attendu, comme nous l'avons dit, que les développements appartiennent à l'algèbre. Nous indiquerons seulement la formule par laquelle on trouve la fraction à laquelle appartient un logarithme négatif.

Soit à chercher la fraction correspondante du logarithme négatif $-0{,}096910$.

On retranche ce logarithme négatif du logarithme de 10, 100, 1000, etc., suivant le degré de précision que l'on veut avoir. Le logarithme de 1000, par exemple, est 3,000000, $-0{,}096910 = 2{,}903090$ pour logarithme du numérateur ; le logarithme du dénominateur est celui de 1000. Or dans les tables

2,903090 répond à 800, ce qui donne pour la fraction cherchée 0,800 ou $\frac{800}{1000}$ ou $\frac{4}{5}$.

Racines.

(283) Nous avons vu n° (264) le moyen de trouver facilement une puissance quelconque d'un nombre; du principe que nous avons établi il suit naturellement qu'en divisant le logarithme de la puissance par l'exposant, on trouve le logarithme de la racine.

— Quelle est la racine carrée de 68 à moins d'un millième près?

Solution. Le logarithme de 68 est 1,83251. La moitié de ce logarithme est 0,91625. Suivant n° (275), on cherche ce logarithme avec trois unités de plus à la caractéristique, pour plus d'exactitude, et l'on trouve qu'il tombe entre ceux de 8246 et 8247. On peut se servir de 8246, dont on prend la millième partie, parce qu'on a ajouté trois unités au logarithme. On a donc pour racine carrée de 68, 8,246 à moins d'un millième près. Si l'on voulait plus d'exactitude, on pourrait ajouter un plus grand nombre d'unités à la caractéristique, ce qui donnerait plus de décimales; on pourrait ensuite déterminer plus rigoureusement le nombre auquel répond le logarithme 3,91625, suivant le n° (274), attendu qu'il tombe entre ceux des tables.

(284) — Quelle est la racine dixième de 5821?

Solution. Le logarithme de 5821 est 3,76500. La dixième partie en est 0,37650. Ce logarithme cherché, avec trois unités caractéristiques, répond à

2379. La racine dixième de 5821 est donc à peu de chose près 2,379.

Moyens proportionnels.

(285) Rappelons-nous, suivant n^{os} (259, 260), que pour insérer un nombre quelconque de moyens géométriques entre deux nombres, il faut diviser celui qui doit être le dernier terme de la progression par le premier, et que le résultat est le degré de la puissance indiqué par le nombre des termes qui précèdent ce dernier. Il faut donc extraire la racine de ce quotient suivant le degré indiqué. D'après cela, soit à insérer 10 moyens géométriques entre 2 et 2568.

Solution. Le logarithme de 2 = 0,30103, celui de 2568 = 3,40960. Soustrayant le logarithme de 2 du logarithme de 2568, il reste 3,10857 pour logarithme de la dixième puissance de la racine. La dixième partie de 3,10857 est 0,310857. Cherchant ce nombre avec 3 unités à la caractéristique (275), on trouve pour racine dixième ou pour raison de la progression 2,772 à un millième près.

Lorsqu'on a la raison, la progression est facile à former.

Compléments arithmétiques.

(286) Si un nombre est entre 1 et 10, sa différence à 10 est dite son complément arithmétique. Ce complément est sa différence à 100, à 1000, à 10000, etc., selon qu'il se trouve entre 10 et 100,

ou entre 100 et 1000, etc. Cette différence est d'autant plus facile à déterminer, que le nombre dont il faut soustraire n'a que des zéros. L'usage de ce complément est spécialement utile pour les grands nombres; mais nous en ferons quelques applications simples afin de mieux les faire concevoir.

Soit à retrancher 54 de 89. Le complément de 54 est 46. Au lieu de retrancher 54 de 89, on peut ajouter le complément 46. $89 + 46 = 135$; mais ce nombre est de 100 trop fort, puisqu'au lieu de retrancher 54 on a ajouté 46, et que 54 et 46 font 100. En supprimant donc le dernier chiffre à gauche, on aura le véritable reste de $89 - 54$ ou 35.

(287) Soit à ajouter 56 et 79 et à retrancher de leur somme $25 + 36$.

Solution.	56
	79
Plus le complément de 25	75
Plus le complément de 36	64
	274

Ce résultat est de 200 trop fort, puisque pour chaque complément il faut retrancher 100. Le véritable reste est donc 74. Si le complément se cherchait sur 1000 ou sur 10000, il faudrait retrancher de la somme autant de mille ou de dizaines de mille qu'on aurait ajouté de compléments. L'usage des compléments est comme on le voit de simplifier les calculs en réduisant plusieurs opérations à une seule; mais ils ne sont vraiment utiles que pour les grands nombres.

(288) Le complément d'un logarithme est sa différence à un autre logarithme qui a 10 pour caractéristique. Par exemple, le logarithme de 31 est 1,49136; son complément ou sa différence à 10,00000 est 8,50864.

Soit à diviser 8991 par 48.

Solution. Logarithme de 8991.	3,95381
Plus le compl. arithm. du logar. de 48. .	8,31876
	12,27257

Il est évident que ce nombre a une dizaine de trop à la caractéristique, puisqu'on a pris le complément sur 10,00000. Le logarithme que l'on reçoit par l'addition des compléments est toujours trop fort d'autant de fois 10 unités ou d'autant de dizaines à la caractéristique qu'on a ajouté de compléments.

En retranchant le dernier chiffre à gauche, il reste 2,27251 pour logarithme du quotient. On le cherche avec une unité de plus à la caractéristique afin d'avoir une décimale au quotient. 3,27257 tombe entre 1873 et 1874. On en conclut que le nombre cherché est 187,3 à un dixième près. Remarquez qu'on ne sépare qu'une décimale sur la droite de 1873, parce qu'on n'a ajouté qu'une unité à la caractéristique, et que par conséquent ce nombre est seulement 10 fois trop fort.

(289) Soit à multiplier $3\,\frac{267}{354}$ par $4\,\frac{509}{827}$ ou $\frac{1329}{354}$ par $\frac{3817}{827}$.

Solution. D'après la manière ordinaire, il faut multiplier 1329 par 3817, 354 par 827, et diviser le produit des numérateurs par celui des dénominateurs.

Par les compléments cette opération se réduit à une simple addition.

Logarithme de 1329.	3,12352
3817.	3,58172
Compl. arithm. du logarith. de 354. .	7,45100
827. .	7,08249
	21,23873

En retranchant deux dizaines de la caractéristique, il reste 1,23873 pour logarithme du produit des deux fractions. En le cherchant avec deux unités de plus à la caractéristique, on trouve qu'il répond à 1732 ou 17,32 à un centième près, produit des deux fractions.

(290) — Quel est le logarithme de $\frac{5}{7}$?

Solution. Au lieu de soustraire le logarithme de 7 du logarithme de 5, on s'y prendra de la manière suivante :

Logarithme de 5.	0,69897
Complém. arithm. du logarith. de 7.	9,15490
	9,85387

Ce résultat est suivant ce que nous avons dit, trop fort de dix unités ; si l'on en retranche dix unités, le reste sera un logarithme négatif, ce qui doit être, puisque c'est celui d'une fraction ; mais lorsqu'on a une suite d'opérations à faire, on reporte cette opération à la fin, ce qui évite dans le courant du calcul l'emploi des logarithmes négatifs. Soit, par exemple, à élever la fraction ci-dessus à sa troisième puissance. On multipliera le logarithme de cette fraction par 3, ce qui donnera 29,56161 pour logarithme du cube de $\frac{5}{7}$; mais puisque le logarithme 9,85387 est trop fort d'une dizaine, 29,56161 doit être trop fort de trois dizaines ou de trente unités. Si l'on soustrait trente unités de 29,56161, on recevra — 0,43839, logarithme négatif du cube de la fraction.

(291) Quelle est la racine cubique de $\frac{29}{35}$?

Solution. Logarithme de 29.	1,46240
Plus le complém. arithm. de 35. . .	8,45593
	9,91833

Il faudrait prendre le tiers de 9,91833, qui est 3,30611, pour avoir le logarithme de la racine cubique de $\frac{29}{35}$; mais ce nombre contient encore un tiers de dizaine de trop ; il vaut mieux ajouter à 9,91833 deux dizaines, ce qui fait 29,91833, dont le tiers est 9,97277 ; ce nombre contient exactement une dizaine de trop qu'il est facile de retrancher. Le reste — 0,02723 est le logarithme négatif de la racine cubique ; cette racine est une fraction. On conçoit que si l'on avait voulu extraire la racine quatrième, cinquième, sixième, etc., on aurait ajouté trois, quatre ou cinq dizaines à la caractéristique, afin qu'après avoir divisé par le nombre qui indique la puissance de la racine, il restât exactement une dizaine de trop.

On voit maintenant le grand avantage qu'on retire des logarithmes et des compléments pour l'abréviation des calculs. Cette découverte, qu'on peut regarder comme une des plus belles et des plus utiles en mathématiques, est due à Nepper, célèbre mathématicien écossais, qui vivait au commencement du 17^{e} siècle.

Liste des nombres premiers depuis 1 jusqu'à 1000.

1	—	227	373	503	653	823
2	101	229	379	509	659	827
3	103	233	383	521	661	829
5	107	239	389	523	673	839
7	109	241	397	541	677	853
11	113	251	—	547	683	857
13	127	257	401	557	691	859
17	131	263	403	563	—	863
19	137	269	409	569	701	877
23	139	271	419	571	709	881
29	149	277	421	577	719	883
31	151	281	431	587	727	887
37	157	283	433	593	733	—
41	163	293	439	599	739	907
43	167	—	443	—	743	911
47	173	307	449	601	751	919
53	179	311	457	607	757	929
59	181	313	461	611	761	937
61	187	317	463	613	769	941
67	191	331	467	617	773	953
71	193	337	479	619	787	967
73	197	347	487	629	797	971
79	199	349	491	631	—	977
83	—	353	493	641	809	983
89	211	359	499	643	811	991
97	223	367	—	647	821	997

FIN.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LE SECOND VOLUME.

§ Ier.

§ II.

§ III.

§ IV.

§ V.

§ VI.

§ VII.

§ VIII.

§ IX.

§ X.

§ XI.

§ XII.

§ XIII.

§ XIV.

§ XV.

§ XVI.

§ XVII.

FIN DE LA TABLE.